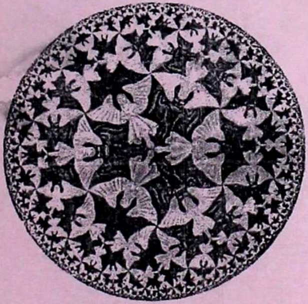
Г. Матиева

ТОПОЛОГИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ



Ош - 2006

Кыргыз Республикасынын билим берүү, илим жана
жаштар саясаты министрлиги

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Г. Матиева

ТОПОЛОГИЯНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Ош - 2006

УДК 515.1
ББК 22.152
М 34

Окуу колдонмосу Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими боюнча басмага сунушталган.

Рецензеттер:

физика-мат.илим.доктору, профессор Чекеев А.А.

физика-мат.илим.доктору, профессор Ашбаев А.А.

Матиева Г.

М 34 Топологиянын элементтери / Ош мамл. ун-ти. – Ош, 2006. 60 бет.

ISBN 9967-03-327-4

Окуу колдонмосу «математика», «колдонмо математика жана информатика» адистиктери боюнча окуган студенттер үчүн даярдалган. Дифференциалдык геометрия жана топология предметинин негизги бөлүктөрүнүн бири болгон топологиянын элементтерин камтыйт.

Мукабада: М.Эшер, Пределдик айлана. Жыгачтагы эки түстүү гравюра, 1960-ж.

М 1602060000-06

УДК 515.1
ББК 22.152

ISBN 9967-03-327-4

МАЗМУНУ

КИРИШҮҮ

Топология - үзгүлтүксүздүк идеясын түшүндүрүүнү жана изилдөөнү максат кылып койгон математиканын бөлүгү болуп эсептелет. Үзгүлтүксүздүк идеясы интуитивдик түрдө мейкиндик менен убакыттын түпкү касиеттерин туюнтат жана таанып-билүү үчүн фундаменталдык мааниге ээ.

Топологиянын предмети болуп фигуралардын жана алардын өз ара жайланышынын гомеоморфтук чагылтуулардагы сактала турган касиеттерин изилдөө болуп эсептелет. Демек, топологияны геометриянын түрү катары кароого болот.

Бул окуу колдонмосунда университеттердин “математика” адистигинин окуу планындагы “Дифференциалдык геометрия жана топология” деп аталган предметтин топология бөлүгү үчүн негизги түшүнүктөр камтылган. Ар бир параграфтын ичинде студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн тапшырмалар көрсөтүлгөн, көптөгөн мисалдар чыгарылыштары менен баяндалган жана тиешелүү чиймелер келтирилген. Практикалык сабак үчүн пайдаланууга керектүү мисалдар жана маселелер ар бир параграфтын акырында берилген.

Көптүктөр латын алфавитинин чоң тамгалары менен, ал эми элементтери бул алфавиттин кичине тамгалары менен белгиленген. Бирок, геометриялык мүнөздөгү мисал-маселелерди караган учурда (мектепте калыптанып калгандай эле) тегиздиктин же мейкиндиктин чекиттери латын алфавитинин чоң тамгалары менен, ал эми түз сызыктар бул алфавиттин кичине тамгалары менен белгиленди.

Автор

§ 1. МЕТРИКАЛЫК МЕЙКИНДИК ЖАНА АНЫН МИСАЛДАРЫ

1. M - бош эмес көптүк, R_+ - терс эмес чыныгы сандардын көптүгү болсун.

Аныктоо. Эгерде ар бир иреттелген (x,y) түгөйүнө (мында $x,y\in M$) анык бир $\rho(x,y)\geq 0$ саны тиешелеш коюлган болсо жана төмөндөгү үч шарт орун алса:

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(x,y) \qquad (\forall x,y\in M)$;

3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z) \qquad (\forall x,y,z\in M)$,

анда M көптүгүндө ρ *метрикасы* аныкталды деп айтышат. Башкача айтканда, M көптүгүндө аныкталган метрика деп жогорудагы үч шартты канааттандыра тургандай $\rho: M\times M\to R_+$ чагылтуусун айтабыз.

M көптүгү андагы аныкталган ρ метрикасы менен бирдикте *метрикалык мейкиндик* деп аталат жана (M,ρ) көрүнүшүндө белгиленет. Ал эми M көптүгүнүн элементтери $x,y,...,z,...$ бул метрикалык мейкиндиктин *чекиттери* деп аталышат. Терс эмес $\rho(x,y)$ саны x,y чекиттеринин арасындагы *аралык* деп аталат. Жогорудагы 1) – 3) шарттарын *метрикалык мейкиндиктин аксиомалары* деп атап коюшат ((1) – теңдештик аксиомасы, 2) – симметрия аксиомасы, 3) - үч бурчтук аксиомасы).

Каалагандай $M\neq 0$ көптүгүндө ρ метрикасын төмөндөгүдөй аныктоого болот:

$\forall x,y\in M$:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{эгерде } x\neq y,\\ 0, & \text{эгерде } x=y \quad \text{болсо}\end{cases}$$

бул метриканы *тривиалдык* метрика деп аташат. 1) -3) аксиомаларынын аткарылышын жеңил эле текшерүүгө болот. Ошентип, ар кандай бош эмес көптүктү метрикалык мейкиндикке айландырууга болот экен. Бир эле көптүктө (эгерде көптүк бирден көп элементтерди кармап турса) ар түрдүү метрикаларды аныктоого болот. Чындыгында эле, эгерде ρ - кандайдыр бир көптүктө аныкталган метрика болсо, анда $k\rho$ деле (мында $k\in R_+$, $k\neq 1$) ушул көптүктө аныкталган метрика болуп эсептелет, жана бул метрика ρ метрикасынан айрымалуу.

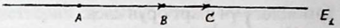
Метрикалык мейкиндиктердин мисалдарын карайлы.

1-мисал. E_n евклиддик мейкиндигин алалы

$(n = 1,2,...)$. $\rho : E_n \times E_n \to R_+$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайбыз.

$$\forall A, B \in E_n : \quad \rho(A,B) = \left|\overline{AB}\right|.$$

Метрикалык мейкиндиктин 1), 2) аксиомаларынын аткарылышында шек жок. 3) аксиоманын аткарылышын текшерип көрөлү. Бул учурда 3) аксиома төмөндөгүдөй жазылат:



1-чийме

4) $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$, мында

$\rho(A,B) = \left|\overline{AB}\right|$, $\rho(B,C) = \left|\overline{BC}\right|$, $\rho(A,C) = \left|\overline{AC}\right|$ $n = 1$ болгондо, б.а.

A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатышса, анда $\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AC}\right|$ б.а.

$$\rho(A,B) + \rho(B,C) = \rho(A,C) \qquad (1)$$

орун алат.

$n > 1$ болгон учурда, эгерде $A, B, C \in E_1$ (б.а. бир түз сызыкта жатышса) болсо, анда (1) орун алат; эгерде бул чекиттер бир түз сызыкта жатышпаса, анда алар үч бурчтукту аныкташат.

Каалаган үч бурчтуктун эки жагынын узундуктарынын суммасы анын үчүнчү жагынын узундугунан чоң болгондуктан төмөндөгүнү алабыз:

$$\rho(A,B) + \rho(B,C) > \rho(A,C), \qquad (2)$$

б.а. 3) аксиома да орун алат экен.

Демек, E_n евклиддик мейкиндиги метриткалык мейкиндик болот.

2-Мисал. $[a,b]$ сандык кесиндисин карайлы (мында $a, b \in R$, $a < b$), б.а. $[a,b] = \{x \in R | \ a \leq x \leq b\}$ көптүгүн карайбыз. $x, y \in [a,b]$ чекиттеринин арасындагы аралыкты төмөндөгүдөй аныктайлы:

$\rho(x,y) = |x - y|$.

Бул учурда 1), 2) – аксиомалардын орун алышы көрүнүп турат, 3)- аксиоманын аткарылышын текшерели.

2-чийме

$\forall x,y,z\in[a,b]$: $|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\le|x-y|+|y-z|$, мындан $\rho(x,y)\le(x,y)+\rho(y,z)$ келип чыгат.

Демек, $[a,b]$ - метрикалык мейкиндик болот.

3-мисал. $C_{[a,b]}$ аркылуу $[a,b]$ сан аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз чыныгы функциялардын көптүгүн белгилешет. Бул көптүктө метриканы төмөндөгү формула боюнча аныктайлы. $\forall f(x),\ g(x)\in C_{[a,b]}$: $\rho(f(x),g(x))=\sup|f(x)-g(x)|$ $(x_0\in[a,b])$.

1), 2)- аксиомалардын аткарылышында шек жок, ал эми 3)- аксиоманын орун алышын окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

$C_{[a,b]}$ метрикалык мейкиндигининин чекиттери болуп функциялар эсептелишет, бул мейкиндик математикалык анализде колдонулат жана функционалдык мейкиндиктин мисалы болуп эсептелет.

2. (M,ρ) - метрикалык мейкиндигин карайлы.

Аныктоо. Борбору $x_0\in M$ чекити болгон $v>0$ радиустуу *ачык шар* деп $\rho(x_0,x)<v$ шартын канааттандыра тургандай $x\in M$ чекиттеринин көптүгүн атайбыз жана $B(x_0,r)$ көрүнүшүндө белгилейбиз:

$$B(x_0,r)=\{x\in M|\rho(x_0,x)<r\}$$

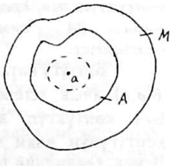
Ал эми $\rho(x_0x)\le v$ шартын канааттандыра тургандай $x\in M$ чекиттеринин көптүгү *туюк шар* деп аталат жана $\overline{B}(x_0,r)$ көрүнүшүндө белгиленет:

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in M|\ \rho(x_0,x)\le r\}$$

$\rho(x_0,x)=r$ шартын канааттандыра тургандай $x\in M$ чекиттеринин көптүгү *сфера* деп аталат жана $S(x_0,r)$ көрүнүшүндө белгиленет:

$$S(x_0,r)=\{x\in M|\ \rho(x_0,x)=r\}$$

$B(x_0,\varepsilon)$ ачык шары $x_0\in M$ чекитинин ε - чеке-бели деп аталат.



3-чийме

A - (M,ρ) метрикалык мейкиндигининин камтылуучу көптүгү болсун $(A\ne\emptyset)$.

Аныктоо. Эгерде $a\in A$ чекитинин ушундай $B(a,\varepsilon)$ ε - чеке бели жашап жана $B(a,\varepsilon)\subset A$ болсо, анда $a\in A$ чекити *ички чекити* деп аталат. Ал эми A көптүгүнүн бардык ички чекиттеринин көптүгү бул көптүктүн *ичи* деп аталат жана $\overset{0}{A}$ (же int A) көрүнүшүндө белгиленет.

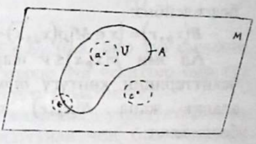
Эгерде көптүктүн бардык чекиттери ички чекиттер болушса, анда ал көптүк *ачык көптүк* деп аталат. Демек, эгер A көптүгү ачык көптүк болсо, анда ал өзүнүн ичи менен дал келет, б.а. $A \equiv A$.

Сандык октогу (же сан түз сызыгындагы) ачык көптүктөргө мисал болуп (a,b) интервалы жана ушундай интервалдардын биригүүсү эсептелет. Тегиздиктеги ачык көптүктүн мисалдары катары ачык тегеректи, ачык жарым тегиздикти, жөнөкөй көп бурчтуктун ичин атоого болот.

Аныктоо. Эгерде $c \in M$ чекитинин ушундай $W(c,\varepsilon)$ чеке-бели жашап жана ал A көптүгү менен бир да жалпы чекитке ээ болбосо, анда C чекити A көптүгүнүн *сырткы* чекити деп аталат. (4-чийме).

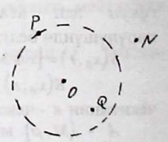
Бул аныктоодон төмөндөгүдөй ырастоо келип чыгат: $c \in M$ чекити $A \subset M$ көптүгүнүн сырткы чекити болушу үчүн бул чекит $CA = M / A$ көптүгүнүн (A көптүгүнүн M көптүгүнө чейинки толуктоочусунун) ички чекити болушу зарыл жана жетиштүү.

Аныктоо. $b \in M$ чекити A көптүгүнүн *чек аралык чекити* деп аталат, эгерде бул чекиттин ар бир $V(b,\varepsilon)$ ε-чеке-белинин A көптүгү менен да, анын CA толуктоочусу менен да кесилиши бош эмес көптүк болсо (б.а. $V(b,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, $V(b,\varepsilon) \cap CA \neq \emptyset$). A көптүгүнүн бардык чек аралык чекиттеринин көптүгү бул көптүктүн *чек арасы* деп аталат жана ∂A символу менен белгиленет.



4-чийме

A көптүгү катары E_2 тегиздигиндеги $B(o,r)$ ачык тегерегин карайлы (5-чийме). Бул көптүктүн ар бир Q чекити A көптүгүнүн ички чекити болуп эсептелет. Демек, евклиддик тегиздиктеги ачык тегерек ачык көптүк болот. Тегиздиктин N чекити A көптүгүнүн сырткы чекити, ал эми P чекити – бул көптүктүн чек аралык чекити болуп эсептелет. $B(o,r)$ ачык тегерегинин чек арасы $S(o,r)$ айланасы болот.



5-чийме

Ушуга окшош эле евклиддик үч ченемдүү E_3 мейкиндиктеги $B(o,r)$ ачык шары ачык көптүк болуп эсептелет, ал эми анын чек арасы $S(o,r)$ сфера болот.

Аныктоо. Эгерде (M,ρ) метрикалык мейкиндигинин A көптүгүн кармап турган шар жашаса, анда A көптүгү чектелген көптүк деп аталат.

Евклиддик тегиздиктеги ар кандай көп бурчтук, ар кандай тегерек же эллипс – чектелген көптүктөр, ал эми гипербола, парабола, синусоида – чектелбеген көптүктөр болушат.

3. $\Im$ аркылуу (M,ρ) метрикалык мейкиндигинин бардык ачык көптүктөрүнүн көптүгүн белгилейли. M көптүгүнүн өзүн жана $\emptyset$ көптүгү ачык көптүктөр деп эсептейбиз: $M \in \Im$, $\emptyset \in \Im$.

$\Im$ көптүгүнүн негизги касиети төмөндөгүдөй теоремада айтылган:

1-Теорема. Метрикалык мейкиндикте:

1) каалаганчалык (чектүү же чексиз) сандагы ачык көптүктөрдүн биригүүсү ачык көптүк болот;

2) каалагандай чектүү сандагы ачык көптүктөрдүн кесилиши ачык көптүк болот.

Далилдөө. 1) U_λ – (M,ρ) метрикалык мейкиндигинин ачык көптүктөрү болсун, б.а. $U_\lambda \in \Im$, мында λ чектүү сандагы же чексиз сандагы маанилерди кабыл алышы мүмкүн. Бардык U_λ көптүктөрүнүн биригүүсүн U аркылуу белгилейли:

$$U = \bigcup_{\lambda} U_\lambda \qquad (3)$$

$\forall x_0 \in U$ чекитин алалы. (3) барабардыктын негизинде төмөндөгүнү алабыз: $\exists \lambda = \lambda_0$ жана $x_0 \in U_{\lambda_0}$.

U_{λ_0}- ачык көптүк болгондуктан анын $x_0 \in U_\lambda$ чекити үчүн $B(x_0,\varepsilon)$ чеке-бели жашайт жана $B(x_0,\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. Бирок $U_\lambda \subset U$ болгондуктан, $B(x_0,\varepsilon) \subset U$. Демек, $\forall x_0 \in U$ чекитинин U көптүгүндө толук камтылып турган $B(x_0,\varepsilon)$ чеке-бели жашайт экен. Мындан U - ачык көптүк экендиги келип чыгат. (ч.т.д.)

2) Бул касиетти эки ачык көптүк үчүн далилдөө жетиштүү. U_1, U_2 - ачык көптүктөрүн алалы. Эгерде $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ болсо, анда ырастообуз орун алат (себеби $\emptyset$ ачык көптүк деп эсептелинет).

$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ болгон учурду карайлы. $V = U_1 \cap U_2$ деп белгилеп коелу. $\forall x_0 \in V$ чекитин алалы, анда $x_0 \in U_1$ жана $x_0 \in U_2$. Ал эми U_1 жана U_2 ачык көптүктөр. U_1 ачык көптүк экендигинен x_0 чекитинин $B(x_0,\varepsilon_1) \subset U_1$ чеке-бели жашай тургандыгы келип чыгат, U_2 - ачык көптүк болгондуктан, x_0 чекитинин $B(x_0,\varepsilon_2) \subset U_2$ чеке-белинин жашашы келип чыгат. ε аркылуу $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ сандарынын эң кичинесин белгилейли. Анда $B(x_0,\varepsilon) \subset B(x_0,\varepsilon_1) \subset U_1$ жана

$B(x_0,\varepsilon)\subset B(x_0,\varepsilon_2)\subset U_2$.

Демек, $B(x_0,\varepsilon)\subset V$, б.а. V көптүгү өзүнүн ар бир x_0 чекити менен кошо ал чекиттин $B(x_0,\varepsilon)\subset V$ боло тургандай ε - чеке-белин да кармап турат экен. Бул болсо V көптүгүнүн ачык көптүк экендигин билдирет. (ч.т.д.)

Практикалык сабак жана студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн көнүгүүлөр.

1. Төмөндөгү функциялардын ар бири R^n көптүгүндө метрика боло тургандыгын көрсөткүлө:

а) $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x-y\|$

б) $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$

в) $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$; $\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$

2. $\rho(x,y)=(x-y)^2$ функциясы R көптүгүндө метриканы аныктабай тургандыгын көрсөткүлө

3. $\rho(x,y)=\min_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$ функциясы R^n көптүгүндө метриканы аныктабай тургандыгын көрсөткүлө.

4. ρ - метрика, r - оң сан болсун. төмөндөгүдөй аныкталган ρ_r функциясы метрика боло тургандыгын көрсөткүлө:

$$\rho_r(x,y)=r\rho(x,y)$$

5. ρ метрика болсун. $\rho'(x,y)=\rho(x,y)/(1+\rho(x,y))$ да метрика боло тургандыгын көрсөткүлө.

6. R^2 көптүгүнүн төмөндөгү камтылуучу көптүктөрүнүн кайсылары ачык көптүктөр болушат:

$$F_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}\cup\{(1,0)\}$$

$$F_2=\{(x,y)\,|\,|x|<1\}$$

$$F_3=\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0\}$$

$$F_4=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$$

$$F_5=\{(x,y)\,|\,x+y<0\}$$

$$F_6=\{(x,y)\,|\,x+y=0\}$$

§2. ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИК ЖАНА АНЫН МИСАЛДАРЫ

1. Метрикалык мейкиндиктеги ачык көптүктөрдүн негизги касиеттери жөнүндөгү 1-Теореманын негизинде топологиялык мейкиндик түшүнүгүн киргизебиз.

$X \neq \emptyset$ көптүгүн алалы. $\mathfrak{I}$ аркылуу X көптүгүнүн камтылуучу көптүктөрүнүн кандайдыр бир системасын белгилейли.

Аныктоо. Эгерде камтылуучу көптүктөрдүн $\mathfrak{I}$ системасы төмөндөгү касиеттерге ээ болсо:Бош көптүк $\emptyset$ жана X көптүгүнүн өзү $\mathfrak{I}$ системасына таандык болушса (б.а. $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \mathfrak{I}$);

II. $\mathfrak{I}$ системасынан алынган каалаганчалык сандагы камтылуучу көптүктөрдүн биригүүсү $\mathfrak{I}$ системасына таандык болсо, б.а. $U_i \in \mathfrak{I} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in \Lambda} U_i \in \mathfrak{I}$

(мында i индекси кабыл ала турган маанилердин көптүгү Λ чектүү да, чексиз да болушу мүмкүн);

III. $\mathfrak{I}$ системасынан алынган каалагандай чектүү сандагы камтылуучу көптүктөрдүн кесилиши $\mathfrak{I}$ системасына таандык болсо, анда X көптүгүндө *топологиялык структура* (же *топология*) аныкталды деп айтышат, ал эми $(X,\mathfrak{I})$ түгөйү *топологиялык мейкиндик* деп аталат. I, II, III касиеттери топологиялык структуранын аксиомалары деп аталышат.

X көптүгүнүн элементтери $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигинин *чекиттери* деп, ал эми $\mathfrak{I}$ системасынын элементтери бул топологиялык мейкиндиктинт *ачык көптүктөрү* деп аталышат. Эгерде X көптүгүндө кандай топология тандалып алынгандыгы белгилүү болсо, анда $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигин жөн эле X аркылуу белгилешет.

1-мисал. (E,ρ) метрикалык мейкиндигин карайбыз. §1деги 1-Теоремадан (E,ρ) метрикалык мейкиндиги топологиялык мейкиндик боло тургандыгы келип чыгат. Андагы топологиялык структура $\mathfrak{I}$ ачык шарлардын жардамында аныкталат. Бул топологиялык мейкиндиктеги топологиялык структура ρ метрикасы тарабынан *индуцирленген* (же *жаратылган*) деп айтышат.

2-мисал. $R^n = R \times R \times ... \times R$ (R көптүгүн өзүнө өзүн n жолу түз көбөйтүүдөн алынган) көптүгүн карайлы. Бул көптүктө ачык көптүк түшүнүгүн төмөндөгүчө аныктайбыз. (a^i, b^i) $(i = 1,2,...,n)$ интервалдарын (n даана) алабыз да, ачык координаталык пареллелепипед деп $a^i < x^i < b^i$ $(i = 1,2,...,n)$ шартын канааттандыра тургандай бардык $M\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in R^n$ чекиттердин көптүгүн атайбыз.

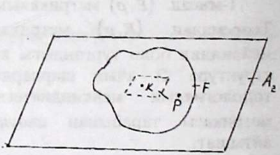
$F \subset R^n$ көптүгүн алалы. Эгерде F көптүгү өзүнүн ар бир чекити менен бирге ал чекитти кармап турган кандайдыр бир ачык координаталык параллелепипедди толук камтып турса, анда бул F көптүгүн ачык көптүк деп атайбыз. Ушундай аныкталган бардык ачык көптүктөрдүн системасы топологиялык структуранын I, II, III аксиомаларын канааттандырат, б.а. R^n көптүгүндө топологиялык структураны аныктайт жана аны *табигый топология* деп аташат. Бул топология R^n көптүгүн топологиялык мейкиндикке айландырат, ал *сандык мейкиндик* ($n = 1$ болгондо *сандык түз сызык* же *сан огу*) деп аталат.

3-мисал. A_2 аффиндик тегиздигинде $P = ABCD$ параллелограммын карайлы. Төмөндөгү шартты канааттандыра тургандай

$$\overline{AX} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AD}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$$

X сыяктуу чекиттердин көптүгү P параллелограммынын *ичи* деп же *ачык параллелограмм* деп аталат жана аны $\mathring{P}$ аркылуу белгилеп коебуз. $F \subset A_2$ көптүгүн алалы. Эгерде F көптүгү өзүнүн ар бир чекити менен бирге ушул чекитти кармап турган кандайдыр бир ачык параллелограммды камтып турса, анда F көптүгүн ачык көптүк деп атайбыз (6-чийме), б.а. $\forall K \in F$ чекити үчүн ушундай P параллелограммы жашап, анын ичи ($\mathring{P}$ ачык параллелограммы) $K \in \mathring{P} \subset F$ шартын канааттандырат.

A_2 тегиздигинде ушундайча аныкталган F сыяктуу ачык көптүктөрдүн $\Im$ системасы топологиялык структуранын аныктоосундагы I, II, III шарттарды канааттандырат. Демек, аффиндик тегиздик топологиялык мейкиндик болот. Ушуга эле окшош A_n аффиндик мейкиндиги топологиялык мейкиндик боло тургандыгын көрсөтүүгө болот.



6-чийме

4-мисал. X - каалагандай көптүк болсун.

$\Im = \{X, \emptyset\}$ системасын карайлы. Бул эки элементтен турган көптүк I, II, III аксиомаларды канааттандыра тургандыгы көрүнүп турат. Демек, $\mathfrak{I} - X$ көптүгүндө аныкталган топология болуп эсептелет. Бул топология *антидискреттик* топология деп, ал эми $(X,\mathfrak{I})$ мейкиндиги - *антидискреттик топологиялык мейкиндик* деп аталат.

5-мисал. X - кандайдыр бир көптүк, $\mathfrak{I} = \Pi(X)$ - X көптүгүнүн мүмкүн болгон бардык камтылуучу көптүктөрүнүн системасы болсун. I, II, III аксиомалардын орун алышында шек жок. Бул топология *дискреттик топология* деп, ал эми $(X,\mathfrak{I})$ мейкиндиги - *дискреттик топологиялык мейкиндик* деп аталат.

4-5-мисалдардан ар кандай X көптүгүн топологиялык мейкиндикке айландыруу мүмкүн экендигин көрөбүз.

6-мисал. $X = \{a,b,c,d\}$ көптүгүн карайлы. $\mathfrak{I}_1 = \{X, \emptyset, \{a,b\}\}$ системасы I, II, III аксиомаларды канааттандырат:

I. $X \cup \emptyset \cup \{a,b\} = X \in \mathfrak{I}_1$

II. $X \cap \emptyset = \emptyset \in \mathfrak{I}_1$, $X \cap \{a,b\} = \{a,b\} \in \mathfrak{I}_1$, $\emptyset \cap \{a,b\} = \emptyset \in \mathfrak{I}_1$

III. $\emptyset \in \mathfrak{I}$, $X \in \mathfrak{I}_1$.

Демек, $(X,\mathfrak{I}_1)$ - топологиялык мейкиндик болот.

$\mathfrak{I}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b,c\}\}$ системасын карайлы. Бул система да I, II, III аксиомаларды канааттандыра тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот. Демек, $\mathfrak{I}_2$ системасы да X көптүгүндө топологиялык структураны (топологияны) аныктайт, ал эми $(X,\mathfrak{I}_2)$ түгөйү топологиялык мейкиндик болот. $(X,\mathfrak{I}_1)$ жана $(X,\mathfrak{I}_2)$ - ар түрдүү топологиялык мейкиндиктер.

Практикалык сабак жана студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн көнүгүүлөр.

2.1. а) Эгерде X көптүгүндө дискреттик топология аныкталган болсо, анда ал көптүк метризациялануучу экендигин көрсөткүлө.

б) X - метризациялануучу топологиялык мейкиндиг берилген болсун. X көптүгүнүн каалагандай түгөй a,b $(a \neq b)$ чекиттери үчүн $U_a \cap U_b = \emptyset$ шартын канааттандыра тургандай $a \in U_a$, $b \in U_b$ ачык камтылуучу көптүктөрүнүн жашай тургандыгын далилдегиле.

в) Эгерде X мейкиндиги экиден кем эмес элементтерди кармап жана антидискреттик топологияга ээ болсо, анда X мейкиндиги метризациялануучу экендигин көрсөткүлө (б) көнүгүүсүн пайдалангыла).

2.2. (а), (б) учурларынын ар биринде U - X көптүгүндө топологияны аныктай тургандыгын көрсөткүлө:

а) $X = R,\ U = \{\emptyset\} \cup \{R\} \cup \{(-\infty, x) | x \in R\}$

б) $X = N,\ U = \{\emptyset\} \cup \{O_n | n \geq 1\}$ (мында $O_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$.)

в) $X = \{a, b, c\}$ көптүгүндө канча ар түрдүү топологияларды аныктоого болот?

г) R көптүгүнүн камтылуучу көптүктөрүнүн төмөндөгүдөй системаларынын бири дагы R көптүгүндө топология боло албай тургандыгын көрсөткүлө:

$$U_1 = \{\emptyset\} \cup \{R\} \cup \{(-\infty, x] | x \in R\};$$

$$U_2 = \{\emptyset\} \cup \{R\} \cup \{(a, b] | a, b \in R, a < b\}$$

2.3. а) X аркылуу (R, ρ) топологиялык (ρ - табигый топологиясы) мейкиндигин белгилейли. Төмөндөгү камтылуучу көптүктөрдүн туюкталышын тапкыла:

$$A = \{1, 2, 3, ...\}, \quad B = \{x | x \in Q\}$$

$$C = \{x | x \in I\}$$

б) Эгерде Y $-(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигинин камтылуучу көптүгү жана $Y \subset F \subset X$ (мында F - туюк көптүк) болсо, анда $\overline{Y} \subset F$ экендигин далилдегиле.

в) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ экендигин көрсөткүлө.

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\quad \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ экендигин далилдегиле.

д) $X \setminus \dot{Y} = \left(\overline{X \setminus Y}\right)$ экендигин көрсөткүлө.

2.4. $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндиги берилген болсун. төмөндөгү ырастоолорду далилдегиле:

а) $\forall x \in X$ чекитинин жок дегенде бир чеке-бели жашайт.

б) Эгерде $N - x$ чекитинин чеке-бели жана $N \subset M \subset X$ болсо, анда M көптүгү да x чекитинин чеке-бели болот.

в) Эгерде M жана N көптүктөрү x чекитинин чеке-белдери болушса, анда $M \cap N$ көптүгү да x чекитинин чеке-бели болот.

г) $\forall x \in X$ чекити жана анын каалагандай N чеке-бели үчүн x чекитинин $U \subset N$ шарты орун ала тургандай U чеке-бели жашайт жана U көптүгү өзүнүн ар бир чекитинин чеке-бели болот.

§3. ТОПОЛОГИЯНЫН БАЗАСЫ. КӨПТҮКТҮН ТУЮКТАЛЫШЫ

1. $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигин карайбыз.

Аныктоо. $x \in X$ чекитинин чеке-бели деп бул чекитти кармап турган каалагандай ачык көптүктү атайбыз.

Бул аныктоодон төмөндөгүдөй ырастоо келип чыгат: $U \subset X$ камтылуучу көптүгү өзүнүн ар бир чекитинин чеке-бели болушу үчүн U көптүгү ачык көптүк (б.а. $U \in \Im$) болушу зарыл жана жетиштүү.

B аркылуу $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигинин ачык камтылуучу көптүктөрүнүн кандайдыр бир системасын белгилейли.

Аныктоо. Эгерде ар бир $x \in X$ чекити жана бул чекиттин каалагандай U_x чеке-бели үчүн $x \in B_x \subset U_x$ ушул шартты канааттандыра тургандай $B_x \in B$ элементи жашаса анда B системасы $\Im$ топологиялык структурасынын (же топологиясынын) *базасы* деп аталат.

Мисалы, (a^i, b^i) интервалдарынын көптүгү R сандык түз сызыктын табигый топологиясынын базасы болот, ал эми евклиддик мейкиндиктеги ачык шарлардын көптүгү бул мейкиндиктин топологиясынын базасы болуп эсептелет. R^n сандык мейкиндигиндеги ачык координаталык параллелепипеддердин көптүгү анын табигый топологиясынын базасын түзөт. Ар кандай топология базага ээ болот (мисалы, $B = \Im$ деп алыш мүмкүн). Топологиянын базасынын негизги касиети төмөндөгүдөй теорема түрүндө келтиребиз.

2-Теорема. $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигинин ачык көптүктөрүнүн B системасы $\Im$ топологиясынын базасы болушу үчүн $\Im$ системасынын ар бир элементи Bнын элементтеринин биригүүсү болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) зарылдык шарты. B $-\Im$ топологиясынын базасы болсун деп эсептейли, $U \in \Im$ кандайдыр бир ачык көптүк болсун. Базанын аныктоосу боюнча ар кандай $x \in U$ чекити үчүн $x \in B_x \subset U$ шарты орун ала тургандай $B_x \in B$ элементи табылат. U көптүгүнүн бардык чекиттери үчүн B_x сыяктуу көптүктөрдүн системасын карайлы. Анда U - B_x сыяктуу көптүктөрдүн биригүүсү болот.

2)жетиштүүлүк шартынын далилдөөсү көрүнүп турат. (ч.т.д).

Аныктоо. Эгерде $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигинин $\Im$ топологиясы X көптүгүнүн чектүү же санаттык сандагы ачык камтылуучу көптүктөрүнөн турган жок дегенде бир базага ээ болсо, анда $(X, \Im)$ мейкиндиги *санаттык сандагы базасы* бар топологиялык мейкиндик деп аталат.

Мисал. 1) R сандык түз сызыктын (же сан огунун) табигый топологиясынын базасы болуп учтары рационалдык сандар болгон интервалдардын көптүгү эсептелет. Бул – санаттык сандагы база болот. Демек, R - санаттык сандагы баасы бар топологиялык мейкиндик; 2) ушуга эле окшош R^n сандык мейкиндиги да, аффиндик, евклиддик мейкиндиктер да санаттык сандагы базасы бар топологиялык мейкиндиктер болушат.

2. $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигинин A камтылуучу көптүгүн алалы $(A \neq \emptyset)$.

Аныктоо. Эгерде $a \in A$ чекитинин ушундай чеке-бели жашап, бул чеке-бел A көптүгүндө камтылып турса, анда $a \in A$ чекити A көптүгүнүн *ички чекити* деп аталат; эгерде $a \in X$ чекитинин ушундай чеке-бели жашап, бул чеке-бел A көптүгүнүн бир да чекитин кармабаса, анда $a \in X$ чекити A көптүгүнүн *сырткы чекити* деп аталат; эгерде $a \in X$ чекитинин ар бир чеке-бели A көптүгү менен да, анын толуктоочусу (б.а. CA көптүгү) менен да бош эмес кесилишке ээ болсо, анда $a \in X$ чекити *чек аралык чекит* деп аталат. A көптүгүнүн *ичи* (б.а. $\overset{\circ}{A}$ көптүгү) жана чек арасы (б.а. ∂A көптүгү) түшүнүктөрү метрикалык мейкиндиктеги ушул түшүнүктөрдүн так өзүндөй аныкталат. Ошондой эле топологиялык мйкиндикте да төмөндөгүдөй ырастоо орун алат: A көптүгү ачык көптүк болушу үчүн анын $\overset{\circ}{A}$ көптүгү (өзүнүн ичи) менен дал келиши зарыл жаан жетиштүү:

$$A \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow A \equiv \overset{\circ}{A} \qquad (4)$$

Аныктоо. Эгерде $x \in X$ чекитинин каалагандай чеке-бели A көптүгү менен бош эмес кесилишке ээ болсо, анда бул чекит A көптүгүнүн *жалгашуу чекити* деп аталат.

Бул аныктоодон A көптүгүнүн ар бир чекити жана ∂A көптүгүнүн ар бир чекити A көптүгүнүн жалгашуу чекити боло тургандыгы келип чыгат.

Аныктоо. A көптүгүнүн бардык жалгашуу чекиттеринин көптүгү бул көптүктүн *туюктальшы* деп аталат жана $\overline{A}$ аркылуу белгиленет:

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

$(a,b) \subset R$ интервалынын туюктальшы $[a,b]$ кесиндиси, $B(0,r) \subset E_2$ ачык тегерегинин туюктальшы $\overline{B}(0,r)$ туюк тегерек болот.

A көптүгүнүн сырткы чекитинин жана жалгашуу чекитинин аныктоолорунан төмөндөгүдөй ырастоо келип чыгат: эгерде x чекити A көптүгүнүн жалгашуу чекити болбосо, анда бул чекит A көптүгүнө карата сырткы чекит болот; тескерсинче, эгерде x чекити A көптүгүнө карата сырткы чекит болсо, анда бул чекит A көптүгүнүн жалгашуу чекити боло албайт. Демек, A көптүгүнүн туюкталышынын толуктоочусу бул көптүктүн толукточусунун ичи менен дал келет экен, б.а. төмөндөгү барабардык орун алат:

$$C\overline{A}=\overset{\circ}{C\hat{A}} \qquad (5)$$

Аныктоо. Эгерде (X,Γ) топологиялык мейкиндигиндеги A көптүгүнүн толуктоочусу CA ачык көптүк болсо, анда A көптүгү *туюк көптүк* деп аталат.

Туюк көптүктүн мисалы катары $[a,b]\subset R$ сандык кесиндини жана $\overline{B}(0,r)\subset E_2$ туюк тегеректи келтирүүгө болот. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндиги бир эле учурда ачык да, туюк да болуп эсептелинет.

Төмөндөгү теореманы көптүктүн туюк көптүк болушунун белгиси катары кароого болот.

3-Теорема. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигиндеги A көптүгү туюк болушу үчүн бул көптүк өзүнүн туюкталышы менен дал келиши зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) зарылдык шарты. $(X,\Im)$ мейкиндигинин A көптүгү туюк көптүк болсун дейли, б.а. $CA\in\Im$. Бирок анда (4) формула боюнча $CA=\overset{\circ}{C\hat{A}}$ кели чыгат. (5) барабардыкты эске алсак, анда $CA=C\overline{A}$ экендигин көрөбүз. Мындан $A\equiv\overline{A}$ (бул жерде биз каалагандай $Y\subset X$ камтылуучу көптүгү үчүн $CCY=Y$ экендигин эске алдык) келип чыгат.

Тескерисинче, $A\equiv\overline{A}$ орун алсын дейли. Анда $CA\equiv C\overline{A}$ жана (5) формула боюнча $CA=\overset{\circ}{C\hat{A}}$. Мындан (4) формула боюнча $CA\in\Im$ экендигин көрөбүз. Демек, A көптүгү туюк экен. (ч.т.д.)

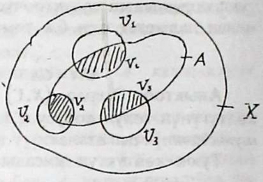
§4. КАМТЫЛУУЧУ ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИК.

$(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигин карайлы. A-бул мейкиндиктин каалагандай камтылуучу көптүгү болсун. $\Im_A$ аркылуу $(X,\Im)$ мейкиндигинин ачык камтылуучу көптүктөрүнүн A көптүгү менен кесилишинен пайда болгон көптүктөрдүн системасын белгилейли:

$\Im_A=\{U_i\cap A|\ A\subset X,\ U_i\in\Im\}$.

4-Теорема. $\Im_A$ системасы топологиялык структуранын I, II,III аксиомаларын канааттандырат.

Далилдөө. а) $\{V_i\}_{i\in\Lambda}\subset\mathfrak{I}_A$ системасын алалы (мында $V_i=U_i\cap A$). $\underset{i\in\Lambda}{\cup}V_i$ көптүгү ачык көптүк экендигин, б.а. бул көптүк $\mathfrak{I}_A$ системасына таандык экендигин көрсөтүү керек.



7-чийме

Чындыгында

$$\underset{i\in\Lambda}{\cup}V_i=\underset{i\in\Lambda}{\cup}(U_i\cap A)=\left(\underset{i\in\Lambda}{\cup}U_i\right)\cap A$$

орун алат. Бул көптүк $\mathfrak{I}_A$ системасына таандык болот. Себеби, $\underset{i\in\Lambda}{\cup}U_i$ - ачык көптүктөрдүн биригүүсү болгондуктан, бул көптүк ачык көптүк болот, б.а. $\underset{i\in\Lambda}{\cup}U_i\in\mathfrak{I}$. Ошондуктан $\left(\underset{i\in\Lambda}{\cup}U_i\right)\cap A\in\mathfrak{I}_A$.

б) $V_1,V_2\in\mathfrak{I}_A$ көптүктөрүн алалы.

$V_1\cap V_2\in\mathfrak{I}_A$ экендигин көрсөтүүбүз керек. Шарт боюнча $V_1=U_1\cap A$, $V_2=U_2\cap A$ (мындагы $U_1,U_2\in\mathfrak{I}$, б.а. булар ачык көптүктөр) болгондуктан,

$V_1\cap V_2=(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)=(U_1\cap U_2)\cap A$ бул көптүк ачык көптүк болот. Себеби, $U_1\cap U_2\in\mathfrak{I}$, б.а. $U_1\cap U_2$ - ачык көптүк. Демек, $V_1\cap V_2\in\mathfrak{I}_A$.

в) $A=X\cap A$, ал эми $X\in\mathfrak{I}$.

$\emptyset=\emptyset\cap A,\quad \emptyset\in\mathfrak{I}$,

мындан $\emptyset\in\mathfrak{I}_A$, $A\in\mathfrak{I}_A$ келип чыгат (ч.т.д.).

Ошентип, $\mathfrak{I}_A$ системасы A көптүгүндө топологиялык структураны аныктай тургандыгын көрдүк. бул топологияны $\mathfrak{I}$ топологиясы тарабынан *индуцирленген* (же *жаратылган*) топология деп аташат.

Аныктоо. $(A,\mathfrak{I}_A)$ түгөйү $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мйекиндигинин камтылуучу *топологиялык мейкиндиги* деп аталат. $\mathfrak{I}_A$ системасына таандык болгон көптүктөр A көптүгүндөгү ачык көптүктөр деп аталышат.

Демек, X көптүгүнүн ачык камтылуучу көптүктөрүнүн A көптүгү менен кесилишинен пайда болгон көптүктөр A көптүгүндө ачык көптүктөр болушат экен.

$G\subset A$ камтылуучу көптүгүн карайлы.

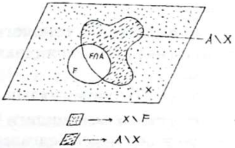
Эгерде $CG=A\setminus G$ көптүгү A көптүгүндө ачык көптүк болсо, анда G көптүгү A көптүгүндө туюк көптүк боло тургандыгын билебиз. (§3тү караңыз).

4-Теорема. $(X,\Im)$ мейкиндигинин туюк көптүктөрү менен A көптүгүнүн кесилишинен пайда болгон көптүктөр гана A көптүгүндө туюк көптүктөр болушат.

Далилдөө. $(X,\Im)$ мейкиндигинин F туюк көптүгүн алалы. $F \cap A$ көптүгү A көптүгүндө туюк көптүк боло тургандыгын далилдөө керек. Бул үчүн $F \cap A$ көптүгүнүн толуктоочу көптүгү $C(F \cap A) = A \setminus (F \cap A) = A \setminus F$ A көптүгүндө ачык көптүк экендигин көрсөтүү жетиштүү, б.а. $A \setminus F$ көптүгүн A көптүгү менен $(X,\Im)$ мейкиндигинин кандайдыр бир ачык көптүгүнүн кесилиши түрүндө туюнтуу жетиштүү.

$A \cap (X \setminus F) = (A \cap X) \setminus (A \cap F) = A \setminus (A \cap F) = A \setminus F$ болгондуктан, $A \setminus F = A \cap (X \setminus F)$ - ачык көптүк. Себеби, $X \setminus F$ - ачык көптүк (ал F туюк көптүгүнүн толуктоочусу).

Демек, $A \setminus F$ ачык көптүгү A көптүгү менен $X \setminus F$ ачык көптүгүнүн кексилиши болот экен. Ал эми $A \setminus F$ ачык көптүгү $F \cap A$ көптүгүнүн толуктоочусу болгондуктан, $F \cap A$ - туюк көптүк болот (A көптүгүндө).



8-чийме

Тескерисинче, $G \subset A$ камтылуучу көптүгү A көптүгүндө туюк көптүк болсун дейли. Анда анын толуктоочусу $CG = A \setminus G$ A көптүгүндө ачык көптүк болот. Бул болсо $CG = A \setminus G = A \cup U$ экендигин билдирет (мында U - X көптүгүндөгү каалагандай ачык көптүк).

$X \setminus U$ көптүгү $(X,\Im)$ мейкиндигинде туюк көптүк болгондуктан, бул көптүк A көптүгү менен кесилишкенде G көптүгүн берет:

$A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U) = A \setminus (A \setminus G) = G$ (ч.т.д.)

§5. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ЧАГЫЛТУУЛАР. ЧЕКИТТЕГИ ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮК.

1. $(X,\Im_X)$, $(Y,\Im_Y)$ топологиялык мейкиндиктерин карайлы. $f : X \to Y$ кандайдыр бир чагылтуу болсун.

Аныктоо. Эгерде f чагылтуусунда ар кандай ачык көптүктүн алгачкы элеси да ачык көптүк болсо, анда ал чагылтуу толугу менен *үзгүлтүксүз* (же жөн эле үзгүлтүксүз) *чагылтуу* деп аталат, б.а. $U \in \Im_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \Im_X$ болсо, анда f чагылтуусу үзгүлтүксүз чагылтуу деп аталат.

Мисалдар 1. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигин өзүнө өзүн чагылтуу үзгүлтүксүз чагылтуу болот, id_X көрүнүшүндө белгиленет:

$id_X : X \to X, \qquad \forall x \in X : f(x) = x$.

2. Турактуу чагылтуу үзгүлтүксүз болот, ал төмөндөгүдөй аныкталат. $(X,\Im_X)$, $(Y,\Im_Y)$ топологиялык мейкиндиктер, $y_0 \in Y$ - бекемделген чекит болсун.

$f : X \to Y, \qquad \forall x \in X : f(x) = y_0$.

Бул чагылтууда каалагандай $U \subset Y$ ачык камтылуучу көптүгүнүн алгачкы элеси X көптүгү менен дал келет (эгерде $y_0 \in U$ болсо), ал эми $y_0 \notin U$ болсо, анда $f^{-1}(U) = \emptyset \in \Im_X$.

3. Дискреттик топологиялык мейкиндикти каалаган топологиялык мейкиндикке каалагандай чагылтуу үзгүлтүксүз болот.

4. Каалаган топологиялык мейкиндикти антидискреттик топологиялык мейкиндикке каалагандай чагылтуу үзгүлтүксүз болот.

5. $(X,\Im)$топологиялык мейкиндик, анын $(A,\Im_A)$ камтылуучу топологиялык мейкиндиги болсун. Төмөндөгүдөй аныкталган жана in_A символу[1] менен белгиленет.

$in_A : A \to X \quad (\forall a \in A:\ in_A(a) = a)$ чагылтуусу A камтылуучу мейкиндигин X топологиялык мейкиндигине *кийирүү* деп аталат жана бул чагылтуу үзгүлтүксүз болот.

$\forall B \subset X$ үчүн $in_A^{-1}(B) = B \cap A$ болгондуктан (индуцирленген топологиянын аныктоосун караңыз), эгерде B көптүгү X мейкиндигинде ачык көптүк болсо, анда $B \cap A$ көптүгү да ачык көптүк болот (A көптүгүндө). Демек, in_A чагылтуусу үзгүлтүксүз экен.

Чагылтуунун үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү түшүнүктү туюк көптүктөрдүн жардамында да аныктоого болот.

5-Теорема. $f:(X,\Im_X) \to (Y,\Im_Y)$ чагылтуусу үзгүлтүксүз болушу үчүн $A \subset Y$ туюк көптүгүнүн алгачкы элесинин туюк көптүк болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) Зарылдык шарты. f чагылтуусу үзгүлтүксүз болсун дейли. $f^{-1}(A)$ көптүгү X мейкиндигинде туюк көптүк экендигин далилдөө керек. Бул үчүн $f^{-1}(A)$ көптүгүнүн

[1] inclusion (англис сөзү)- "киргизүү", "кийирүү", "ичине салуу" деген маанилерди түшүндүрөт.

толуктоочусу $X \setminus f^{-1}(A)$ ачык көптүк экендигин көрсөтүү жетиштүү. Чындыгында, $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.

Себеби, f үзгүлтүксүз чагылтуу болгондуктан, $Y \setminus A$ ачык көптүгүнүн алгачкы элеси $f^{-1}(Y \setminus A)$ ачык көптүк болот, б.а. $X \setminus f^{-1}(A)$ ачык көптүк экен.

2) Жетиштүүлүк шартынын далилдөөсүн окурманга өз алдынча иштөөгө тапшырма катары сунуштайбыз.

Эскертүү. Толугу менен үзгүлтүксүз чагылтууда Y мейкиндигиндеги ачык (туюк) көптүктөрдүн алгачкы элестери да ачык (туюк) көптүктөр болушат экен. Бирок, X мейкиндигиндеги ачык (туюк) көптүктөрдүн толугу менен үзгүлтүксүз чагылтуудагы элестери ачык (туюк) көптүктөр болбой калышы да мүмкүн.

Мисал катары жогорудагы 3-4-мисалдарда каралган чагылтууларга кайрылалы:

а) $f:(X,\Im_D) \to (Y,\Im_Y)$, мында $\Im_D$ - дискреттик топологиялык структура.

$\forall U \in \Im_D$ көптүгүн алалы, анда $f(U) \subset Y$ ачык көптүк болбой калышы да мүмкүн.

б) $f:(X,\Im_X) \to (Y,\Im_T)$, мында $\Im_T$ - тривиалдык топологиялык структура. $\forall U \in \Im_X$ үчүн $X \setminus U$ - туюк көптүк болот, $f(X \setminus U) \subset Y$. $\Im_T = \{\emptyset, Y\}$ болгондуктан, $\emptyset, Y$ ушул эки көптүк гана Y мейкиндигинде ачык да, туюк да көптүктөр болушат. Демек, $f(X \setminus U)$ көптүгү Y мейкиндигинде туюк көптүк болбой калышы да мүмкүн экен.

Төмөндөгү теорема үзгүлтүксүз чагылтуулардын жөнөкөй жана маанилүү касиетин туюнтат.

6-Теорема. Үзгүлтүксүз чагылтуулардын композициясы да үзгүлтүксүз чагылтуу болот, б.а. эгерде X,Y,Z - топологиялык мейкиндиктер, ал эми $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ - үзгүлтүксүз чагылтуулар болушса, анда бул эки чагылтуунун композициясы $g \circ f : X \to Z$ үзгүлтүксүз чагылтуу болот.

Далилдөө. $h = g \circ f$ деп белгилеп коелу. Бул чагылтуунун үзгүлтүксүз экендигин далилдөө үчүн, эгерде $U \subset Z$ каалагандай ачык көптүк болсо, анда $h^{-1}(U)$ – X мейкиндигинде ачык көптүк боло тургандыгын көрсөтүү керек. Чындыгында, $g^{-1}(U)$ көптүгү Y мейкиндигинде ачык көптүк болот (себеби g - үзгүлтүксүз чагылтуу), ал эми анын алгачкы элеси $f^{-1}(g^{-1}(U))$ – X мейкиндигинде ачык көптүк болот (себеби f - үзгүлтүксүз чагылтуу).

Демек, $h^{-1}(U)=f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ ачык көптүк болот.

Натыйжа. Үзгүлтүксүз чагылтуунун *тарылуусу* да үзгүлтүксүз болот.

Далилдөө. $f:(X,\Im_X)\to(Y,\Im_Y)$ үзгүлтүксүз чагылтуу, $A\subset X$ камтылуучу көптүк болсо, анда f чагылтуусунун A көптүгүнө тарылуусун эки үзгүлтүксүз чагылтуунун композициясы катары кароого болот:

$f\big|_A = f\circ in_A$.

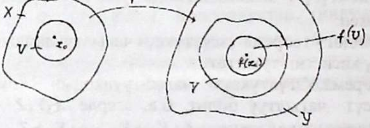
Жогорудагы теореманын негизинде $f\big|_A$ чагылтуусу үзгүлтүксүз болот.

Аныктоо. Топологиялык мейкиндиктин (толугу менен) үзгүлтүксүз чагылтуудагы элеси көпчүлүк учурларда ал мейкиндиктин *үзгүлтүксүз элеси* деп аталат.

2. Чекиттеги үзгүлтүксүздүк.

$f:X\to Y$ чагылтуусун карайлы, $\forall x_0\in X$ чекитин алалы.

Аныктоо. Эгерде $f(x_0)\in Y$ чекитинин каалагандай V чеке-бели үчүн $x_0\in X$ чекитинин ушундай U чеке-бели жашап, $f(U)\subset V$ шарты орун алса, анда f чагылтуусу $x_0\in X$ *чекитинде үзгүлтүксүз* деп аталат.



9-чийме

X,Y - метрикалык мейкиндиктер болгон учурда аныктоодогу U,V чеке-белдери үчүн x_0 жана $f(x_0)$ чекиттеринин шардык чеке-белдерин кароого болот. Ошондуктан, бул учурда үзгүлтүксүздүктүн аныктоосу математикалык анализ курсундагы (төмөндө келтирилген) классикалык аныктоого тең күчтүү болот.

Аныктоо. Эгерде $\forall\varepsilon>0$ саны үчүн ушундай $\delta>0$ саны табылып, x_0 чекитинен δ дан кичине аралыкта жайланышкан $x\in X$ чекитинин элеси x_0 чекитинин элесинен ε дон кичине аралыкта жайланышса, б.а. $\rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ орун алса, анда $f:X\to Y$ чагылтуусу $x_0\in X$ чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

7-Теорема. $f:X\to Y$ чагылтуусу толугу менен үзгүлтүксүз болушу үчүн анын X мейкиндигинин ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) зарылдык шарты. $f:X\to Y$ толугу менен үзгүлтүксүз чагылтуу болсун дейли. $\forall x_0\in X$ чекитин алалы. f чагылтуусу ушул чекитте үзгүлтүксүз болушун текшерели. $f(x_0)$ чекитинин $\forall V\subset Y$ чеке-бели үчүн изделүүчү U чеке-бели катары $f^{-1}(V)\subset X$ көптүгүн алууга болот. Себеби, шарт боюнча V ачык көптүгүнүн алгачкы элеси $f^{-1}(V)$ $-X$ мейкиндигинде ачык көптүк болот. Чындыгында $f^{-1}(V)$ көптүгү x_0 чекитин кармап турат жана $f(U)\subset V$ $\left(f\left(f^{-1}(V)\right)=V\subset U\right)$ орун алат.

2) Жетиштүүлүк шарты. f – X мейкиндигинин ар бир чекитинде үзгүлтүксүз чагылтуу болсун дейли. Каалаган $V\subset Y$ ачык көптүгүнүн алгачкы элеси X мейкиндигинде ачык көптүк болушун далилдөө керек. Ал үчүн $f^{-1}(V)$ көптүгүнүн ар бир x_0 чекити ички чекит экендигин, б.а. ар бир x_0 чекити өзүнүн кандайдыр бир U чеке-бели менен кошо $f^{-1}(U)$ көптүгүндө камтылып тургандыгын текшерүү керек. Ушундай U чеке-белинин жашай тургандыгы f чагылтуусунун x_0 чекитинде үзгүлтүксүз (шарт боюнча) экендигинен жана $f^{-1}(V)$ көптүгү x_0 чекитинин чеке-бели боло тургандыгынан келип чыгат (ч.т.д.).

Мындан ары толугу менен үзгүлтүксүз чагылтууларды жөн эле үзгүлтүксүз чагылтуулар деп атайбыз.

§6. ГОМЕОМОРФИЗМДЕР. ТОПОЛОГИЯЛЫК ТИП.

1. $(X,\Im_X)$, $(Y,\Im_Y)$ топологиялык мейкиндиктерин карайлы.

Аныктоо. Эгерде $f:X\to Y$ чагылтуусу төмөндөгүдөй эки шартты канааттандырса:

1) f -биекция болсо; 2) f жана f^{-1} чагылтуулары үзгүлтүксүз болушса, анда бул чагылтуу *гомеоморфизм* (же гомеоморфтук чагылтуу) деп аталат.

f чагылтуусунун үзгүлтүксүздүгүнөн жана биекция болушунан

f^{-1} чагылтуусунун үзгүлтүксүз болушу келип чыкпайт.

Мисалдар. 1) $X=\{a,b\}$, $Y=\{c,d\}$ эки чекиттүү топологиялык мейкиндиктер болушсун. Эгерде X - дискреттик топологиялык мейкиндик, ал эми Y - антидискреттик топологиялык мейкиндик болсо, анда $f:X\to Y$, $a\mapsto c$, $b\mapsto d$ чагылтуусу үзгүлтүксүз жана биекция (тескериленүүчү) болот. Бирок, $f^{-1}:Y\to X$ чагылтуусу үзгүлтүксүз болбой тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот.

$(X,\Im_D)$, $\Im_D=\{\emptyset, X, \{a\},\{b\}\}$,

$(Y,\Im_T)$, $\Im_T=\{\emptyset, \{c,d\}\}$

2) $f:[0,2\pi]\to S^1$ $\left(S^1\subset R^2\right)$ жарым ачык интервалды S^1 бирдик айланага чагылтууну карайлы:

$\forall t\in[0,2\pi]$: $f(t)=P(\cos t,\sin t)\in S^1$ (мында $x=\cos t$, $y=\sin t$ $-P$ чекитинин координаталары). Бул чагылтуу үзгүлтүксүз жана биективдүү. Бирок, тескери чагылтуу $f^{-1}:S^1\to[0,2\pi)$ $Q(1,0)\in S^1$ чекитинде үзүлүшкө ээ болот.

Эгерде $f:X\to Y$ гомеорфизми жашаса, анда X жана Y топологиялык мейкиндиктери *гомеоморфтуу* мейкиндиктер деп аталышат жана $X\sim Y$ көрүнүшүндө белгиленет.

Гомеоморфизмдин мисалдарын карайлы.

1. Дискреттик топологиялык мейкиндикти дискреттик топологиялык мейкиндикке биективдүү чагылтуу ар дайым гомеоморфизм болот.

2. Антидискреттик топологиялык мейкиндикти антидискреттик топологиялык мейкиндикке биективдүү чагылтуу дайыма гомеорморфизм болот.

3. $tg:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\mapsto R$, $x\mapsto tgx$ чагылтуусу гомеоморфизм болот. Бул чагылтуу биекция болгондуктан тескери чагылтуу жашайт:

$arctg:R\to\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ жана алар экөө тең үзгүлтүксүз экендиги белгилүү. Демек, берилген чагылтуу гомеоморфизм болот.

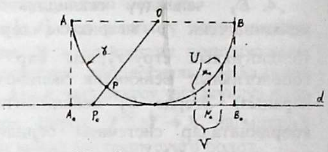
Бул гомеоморфизмдин $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тарылуусу $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,+\infty)$ гомеоморфизмин, ал эми $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ интервалына тарылуусу $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,+\infty)$ гомеоморфизмин берет.

4. E_3 ченемдүү евклиддик мейкиндикти карайлы. Бул мейкиндиктин ρ метрикасы тарабынан жаратылган табигый топологиялык структурасы бар. R^3 сандык мейкиндиги да топологиялык мейкиндик экендигин билебиз (§2, 1-2-мисалдарды караңыз). Эгерде E_3 мейкиндигинде $\Re=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ тик бурчтуу координаталар системасы берилген болсо, анда $f:E_3\to R^3$ чагылтуусун $f(M)=m$ закону боюнча аныктоого болот, мында $M\in E_3$, $m=(x^1,x^2,x^3)\in R^3$ жана x^1,x^2,x^3 - M чекитинин $\Re=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$системасындагы координаталары. Ушул чагылтуу гомеоморфизм боло тургандыгын көрсөтөлү.

$\forall M_0\in E_3$ чекитин алалы, ал эми $m_0=(x_0^1,x_0^2,x_0^3)$ - анын f чагылтуусундагы элеси болсун. R^3 мейкиндигинде m_0 чекитинин каалагандай V_0 чеке-белин алабыз жана V аркылуу ушул m_0 чекитин кармап турган жана V_0 чеке-белине камтылуучу ачык координаталык $(a^i<x_0^i<b^i,\ i=1,2,3)$ параллелепипедди белгилейбиз (§2 б2 – мисалды караңыз). ε аркылуу $|a^i-x_0^i|$ жана $|b^i-x_0^i|$ $(i=1,2,3)$ сандарынын кичинесин белгилейли. Анда M_0 чекитинин ε -чеке-бели U үчүн $f(U)\subset V\subset V_0$ орун алат. Демек, f чагылтуусу M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот. M_0 – E_3 мейкиндигинин каалаган чекити болгондуктан, $f:E_3\to R^3$ чагылтуусу үзгүлтүксүз болот. Жогорудагылардан $f^{-1}:R^3\to E_3$ чагылтуусу да үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат. Демек, f - гомеоморфизм.

5. E_2 евклиддик тегиздигинде учтары A жана B чекиттери болгон γ жарым айланасын алабыз. $d-\gamma$ жарым айланасынын (AB) түз сызыгына параллель болгон жанымасы болсун. A_0 жана B_0 аркылуу A жана B чекиттеринин d жаныма түз сызыгындагы ортогоналдык проекцияларын белгилейли. E_2 евклиддик тегиздигинин табигый топологиясы γ көптүгүндө кандайдыр бир $\Im$ топологиясын индуцирлейт (жаратат), ал эми $I=[A_0,B_0]$ кесиндисинде T топологиясын жаратат. Ошентип биз $(\gamma,\Im)$ жана (I,T) топологиялык мейкиндиктерине ээ болобуз. $f:\gamma\to I$ чагылтуусу γ жарым айланасын $[A_0,B_0]$ кесиндисине ортогоналдык проекциялоо болсун. Ушул чагылтуу гомеоморфизм экендигин далилдейли.

(f чагылтуусунун биекция экендиги көрүнүп турат (10-чиймени караңыз)).



10-чийме

Ал үчүн $\forall M_0 \in \gamma$ чекитин жана анын $N_0 = f(M_0)$ элесин карайбыз. N_0 чекитинин каалагандай V чеке-бели (10-чиймени караңыз) үчүн M_0 чекитинин $f(U) \subset V$ шартты канааттандыра тургандай U чеке-белин көрсөтүүгө болот. Демек, f чагылтуусу M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот, ал эми M_0 жарым айлананын каалагандай чекити болгондуктан, f чагылтуусу үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат.

$f^{-1}: [A_0 B_0] \to \gamma$ (же $f^{-1}: I \to \gamma$) чагылтуусу үзгүлтүксүз болушун жогорудагыга окшош эле (f чагылтуусу үчүн кандай далилденсе, так ошондой эле) далилдөөгө болот. Ошентип, γ жарым айланасы I кесиндисине гомеоморфтуу болот экен. Ушуга эле окшош γ' ачык жарым айланасы I' ачык кесиндисине (интервалга) гомеоморфтуу болушун көрсөтүүгө болот.

γ жарым айланасынын борбору O чекити болсун (10-чийме). $g: \gamma' \to d$ чагылтуусун төмөндөгүдөй закон боюнча аныктайлы:

$$\forall P \in \gamma: g(P) = P_0 \in d,$$

мында шооласы менен d түз сызыгынын кесилиш чекити. Бул чагылтуу гомеоморфизм экендигин жеңил эле текшерүүгө болот (бул ишти окурманга өз алдынча аткаруу үчүн тапшырма катары сунуштайбыз).

Эки гомеоморфизмдин композициясы $(g_0 f^{-1}): I' \to d$ (мында $f^{-1}: I' \to \gamma'$, $g: \gamma' \to d$) да гомеоморфизм болушун жогортодон билебиз. Ошентип, (a, b) ачык кесиндиси R сандык түз сызыгына (сан огуна) гомеоморфтуу болот экен.

$f: X \to Y$ чагылтуусу гомеоморфизм болсун. Эгерде $X \equiv Y$ болсо, анда $f: X \to X$ чагылтуусу гомеоморфизми "X мейкиндигинин гомеоморфизми" деп аталат. Буга мисал катары E_2 евклиддик тегиздикти окшош өзгөртүп түзүүнү жана A_2 аффиндик тегиздикти аффиндик өзгөртүп түзүүнү келтирүүгө болот.

Гомеоморфизмдердин эң жөнөкөй, бирок маанилүү касиеттери төмөндөгүдөй теоремада айтылган.

8-Теорема. а) Ар кандай топологиялык мейкиндиктин өзүн-өзүнө теңдеш чагылтуу гомеоморфизм болот; б) Гомеоморфизмге тескери чагылтуу да гомеоморфизм болот; в) Эки гомеоморфизмдин композициясы да гомеоморфизм болот.

Далилдөө. а), б) ырастоолорунун далилдөөлөрү өтө жеңил, бул ишти окурманга өз алдынча иштөөгө тапшырма катары сунуштайбыз. в) ырастоосун далилдейли.

$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ гомеоморфизмдерин карайлы. Булардын композициясын h аркылуу белгилейли: $h=g\circ f$. Анда $h:X\to Z$ үзнүлтүксүз чагылтуу болот, себеби f жана g чагылтуулары үзгүлтүксүз. Ошондой эле f жана g - биективдүү чагылтуулар болгондуктан, $h=g\circ f$ чагылтуусу да биекция болот. Мындан h^{-1} чагылтуусунун жашай тургандыгы келип чыгат жана $h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ болот. Ал эми $h^{-1}:Z\to X$ чагылтуусунун үзгүлтүксүз экендиги f^{-1} жана g^{-1} чагылтууларынын үзгүлтүксүздүгүнөн келип чыгат. (ч.т.д.)

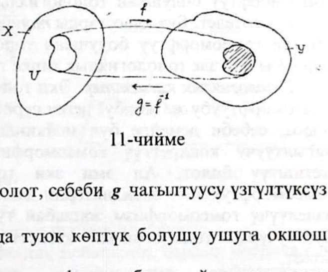
Гомеоморфизмдин дагы бир касиетин карайлы.

9-Теорема. Топологиялык мейкиндиктерди гомеоморфтук чагылтууда каалагандай ачык көптүктүн элеси да ачык көптүк болот, ал эми каалагандай туюк көптүктүн элеси да туюк көптүк болот.

Далилдөө.

$f:X\to Y$ - гомеоморфизмин карайлы.

$g=f^{-1}:Y\to X$ - тескери чагылтуу, $U\subset X$ - ачык камтылуучу көптүк болсун. Анда



11-чийме

$f(U)=g^{-1}(U)$ - ачык көптүк болот, себеби g чагылтуусу үзгүлтүксүз чагылтуу (шарт боюнча).

Туюк көптүктүн элеси да туюк көптүк болушу ушуга окшош эле текшерилет (ч.т.д).

Ошентип, $f:X\to Y$ гомеоморфизми бул мейкиндиктердин топологиялык структураларынын ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештикти аныктайт.

Демек, топологиялык көз караш менен алганда гомеоморфтук мейкиндиктер бирдей эле түзүлүшкө ээ болушат:

$X \to Y$ гомеоморфизми X жана Y мейкиндиктериндеги бардык түзүлүштөрдү дал келтирет (топологиялык структуранын терминдеринде аныкталган түзүлүштөрдүн баарын).

10-Теорема. Топологиялык мейкиндиктердин көптүгүндө аныкталган гомеоморфтуулук катышы эквиваленттүүлүк катышы болот; б.а. төмөндөгү үч шарт аткарылат.

а) рефлексивдүүлүк шарты: $X \sim X$; б) симметриялуулук шарты: эгерде X мейкиндиги Y мейкиндигине гомеоморфтуу болсо, анда Y мейкиндиги X мейкиндигине гомеоморфтуу болот:

$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

в) Транзитивдүүлүк шарты: эгерде X мейкиндиги Y мейкиндигине гомеоморфтуу болсо, ал эми Y мейкиндиги Z мейкиндигине гомеоморфтуу болсо, анда X мейкиндиги Z мейкиндигине гомеоморфтуу болот:

$(X \sim Y, \quad Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$.

Далилдөө. а) $id_X : X \to X$ - гомеоморфизми ар дайым жашайт, демек, $X \sim X$.

б) $f^{-1} : Y \to X$ - гомеоморфизм болот, демек $Y \sim X$.

в) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ гомеоморфизмдер болгондуктан, $g \circ f : X \to Z$ гомеоморфизми жашайт. Демек, $X \sim Z$ (ч.т.д.).

Топологиялык тип. Ошентип, бардык топологиялык мейкиндиктердин көптүгү гомеоморфтуулук катышына карата эквиваленттүүлүк класстарына ажырайт. Ар бир класс – өз ара гомеоморфтуу болушкан топологиялык мейкиндиктердин көптүгү болуп эсептелет. Бул класстарды *топологиялык типтер* деп аташат. Өз ара гомеоморфтуу болушкан топологиялык мейкиндиктердин бардыгы бир эле топологиялык типке таандык болушат.

Топологиялык касиеттер. Эки топологиялык мейкиндик өз ара гомеоморфтуубу же жокбу? деген суроого оң жооп берүү жеңил эле болот, себеби демейде бул мейкиндиктердин бирин экинчисине чагылтуучу конкреттүү гомеоморфизмдин жашашын көрсөтүү жетиштүү болот. Ал эми эки топологиялык мейкиндиктин гомеоморфтуу эмес экендиктерин далилдөө татаалыраак: бул үчүн изделүүчү гомеоморфизм жашабай тургандыгын көрсөтүү керек. Бул учурда топологиялык касиеттерди" жардамга чакырууга" болот.

Аныктоо. Топологиялык касиеттер деп өз ара гомеоморфтуу топологиялык мейкиндиктердин бардыгы ээ боло тургандай же ээ болушпай турган касиеттерди айтышат. Мындай касиеттерди кийинки параграфтарда карайбыз (§7, §8, §9).

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар жана көнүгүүлөр:

1) Чеги бар жарым сфера туюк тегерекке гомеоморфтуу

экендигин далилдегиле.

2) Чеги жок жарым сфера ачык тегерекке гомеоморфтуу болушун көрсөткүлө.

3) Ачык тегерек тегиздикке гомеоморфтуу экендиги далилденсин.

4) Томпок көп бурчтук туюк тегерекке гомеоморфтуу экендиги көрсөтүлсүн.

5*)* Шоола $[a,b) \subset R)$ жарым интервалга гомеоморфтуу болушун далилдегиле.

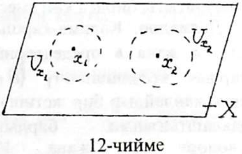
§7. ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИКТИН ХАУСДОРФТУУЛУГУ

Топологиялык касиеттердин мисалдары болуп "чектүүлүк", "санаттуулук"(топологиялык мейкиндиктин да, топологиялык структуранын да), "метризациялануучулук", "дискреттүүлүк", "антидискреттүүлүк" түшүнүктөрү эсептелишт.

$(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигин карайлы.

Аныктоо. Эгерде $(X,\mathfrak{I})$ мейкиндигинин каалагандай эки ар түрдүү чекиттеринин кесилишпей турган чеке-белдери жашаса, анда аны *хаусдорфтук*[2] топологиялык мейкиндик деп аташат.

Демек, эгерде $(X,\mathfrak{I})$ - хаусдорфтук топологиялык мейкиндик болсо, анда $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ чекиттери үчүн ушундай $U_{x_1}, U_{x_2} \in \mathfrak{I}$ көптүктөрү жашап, $U_{x_1} \ni x_1$, $U_{x_2} \ni x_2$ жана $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$ болот 12-чиймени караңыз.



12-чийме

U_{x_1} жана U_{x_2} чеке-белдери x_1 жана x_2 чекиттерин бири-биринен ажыратып (бөлүп) турушат.

Сандык мейкиндик, евклиддик мейкиндик, бардык метрикалык мейкиндиктер хаусдорфтук топологиялык мейкиндиктин мисалдары болушат. Ал эми экиден кем эмес элементтери бар антидискреттик топологиялык мейкиндик хаусдорфтук мейкиндик боло албайт.

---

[2] Ф.Хаусдорф (1868-1942) – немец математиги, топологиялык мейкиндик түшүнүгүн биринчи негиздеген, көптүктөр теориясындагы жана топологиядагы эмгектери менен белгилүү.

11-Теоерма. $(X,\Im)$ хаусдорфтук топологиялык мейкиндигинде бир элементтүү камтылуучу көптүктөрү туюк болушат.

Далилдөө. $x_0 \in X$ чекитин алалы. $\{x_0\}$ көптүгүнүн туюк экендигин далилдөө үчүн анын толуктоочусу $X \setminus \{x_0\}$ - ачык көптүк экендигин көрсөтүү жетиштүү. Чындыгында, каалагандай $y \in X \setminus \{x_0\}$ чекити x_0 чекитин кармабаган чеке-белге ээ болот (себеби шарт боюнча $(X,\Im)$ - хаусдорфтук мейкиндик). Демек, y чекити $X \setminus \{x_0\}$ көптүгүнүн ички чекити экен. Ал эми y бул көптүктүн каалагандай чекити болгондуктан, теорема далилденди.

Натыйжа. Хаусдорфтук мейкиндиктеги чектүү көптүктөр туюк болушат.

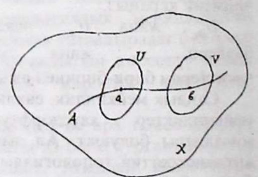
Аныктоо. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигинде чекиттердин $\{a_n\}=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ удаалаштыгы берилген болсун. эгерде $a \in X$ чекитинин каалагандай U чеке-бели үчүн ушундай N номери табылып, бардык $n > N$ үчүн $a_n \in U$ болсо, анда a чекити $\{a_n\}$ удаалаштыгынын *предели* (топологиялык предели) деп аталат. Мындай учурда $\{a_n\}$ удаалаштыгы a чекитине жыйналат деп айтышат.

Мисалдар. 1. Антидискреттик мейкиндикте каалагандай удаалаштык каалаган чекитке жыйналат.

2. Дискреттик мейкиндиктеги $\{a_n\}$ удаалаштыгы a чекитине жыйналышы үчүн удаалаштыктын бардык мүчөлөрү (кандайдыр бир мүчөсүнөн баштап) a чекити менен дал келиши керек.

12-Теорема. $(X,\Im)$ хаусдорфтук мейкиндигиндеги $\{a_n\}$ удаалаштыгы бирден көп эмес пределге ээ болот.

Далилдөө. Карама-каршысынан болжолдойлу: $\{a_n\}$ удаалаштыгы a жана b пределдерине ээ болсун, ал эми U,V аркылуу алардын кесилишпөөчү $(U \cap V = \emptyset)$ чеке-белдерин белгилейли. Анда, кандайдыр бир жетишээрлик чоң N номеринен баштап $\{a_n\}$ удаалаштыгынын бардык мүчөлөрү U жана V көптүктөрүндө жатыштары керек. Бул карама-каршылык теореманы далилдейт.



13-чийме

13-Теорема. $(X,\Im)$ хаусдорфтук мейкиндигинин $(A,\Im_A)$ камтылуучу мейкиндиги да хаусдорфтук мейкиндик болот.

Далилдөө. Эгерде $a,b \in A$ эки ар түрдүү чекиттер, ал эми

$U,V \subseteq X$ - алардын $(X,\Im)$ мейкиндигиндеги кесилишпөөчү чекебелдери болушса, анда $U \cap A$ жана $V \cap A$ көптүктөрү a,b чекиттеринин $(A,\Im_A)$ мейкиндигиндеги чеке-белдери болушат.

Мисал. Топологиялык мейкиндиктин чектүүлүк (элементтеринин санынын чектүүлүгү), санаттуулук, метризациялануучулук сыяктуу касиеттери ал мейкиндиктин камтылуучу мейкиндиктерине да өтөт.

Практикалык сабактар жана студенттин өз алдынча иштөөсү үчүн мисалдар.

§8. КОМПАКТУУЛУК. ТОПОЛОГИЯЛЫК ЖАНА МЕТРИКАЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДЕГИ КОМПАКТУУ КӨПТҮКТӨР

$(X,\Im)$ мейкиндигинин камтылуучу көптүктөрүнүн кандайдыр бир системасын $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ $(X_\alpha \subset X)$ көрүнүшүндө белгилеп алалы.

Аныктоо. Эгерде $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ системасынын көптүктөрүнүн биригүүсү X көптүгүн берсе, б.а. $X = \bigcup\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ болсо, анда бул система X көптүгүнүн *каптоосу* деп аталат.

Эгерде $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигинин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ каптоосунун ар бир элементи X_α - ачык көптүк болсо, анда аны $(X,\Im)$ мейкиндигинин *ачык каптоосу* деп атайбыз жана $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

$\{U_{\alpha_k}\}$ аркылуу $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ системасынын камтылуучу системасын белгилейли: $\{U_{\alpha_k}\}\subset\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Эгерде $\{U_{\alpha_k}\}$ системасы да $(X,\Im)$ мейкиндигинин каптоосу болсо, б.а. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_k}$ орун алса, анда аны $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ каптоосунун *камтылуучу каптоосу* деп аташат.

Аныктоо. Эгерде $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигинин ар бир ачык каптоосу чектүү сандагы элементтерден турган камтылуучу каптоого ээ болсо, анда бул топологиялык мейкиндикти *компактуу* топологиялык мейкиндик деп атайбыз.

Мисалдар. 1. Ар кандай антидискреттик топологиялык мейкиндик компактуу болот.

2. Чектүү сандагы элементтерден турган ар кандай топологиялык мейкиндик компактуу болот.

3. Каалагандай $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигиндеги ачык

көптүктөрдүн саны чектүү болсо, анда мындай мейкиндик компактуу болот.

4. Элементтеринин саны чексиз көп болгон дискреттик топологиялык мейкиндик компактуу болбойт.

5. Сандык түз сызык R компактуу эмес. Себеби, анын (a,b) $(a,b \in R)$ көрүнүшүндөгү ачык кесиндилерден турган каптоосу чектүү сандагы элементтерди (ачык кесиндилерди) кармаган камтылуучу каптоого ээ болбойт.

Аныктоо. $A \subset (X,\Im)$ көптүгүн карайлы. Эгерде $(A,\Im_A)$ камтылуучу топологиялык мейкиндиги компактуу болсо, анда A көптүгү *компактуу көптүк* деп аталат.

Мисалдар.1. $[a,b] \subset R$ сандык кесиндиси R сандык мейкиндигинде компактуу мейкиндик болот.

2. Айлана, үч бурчтук, сфера – евклиддик мейкиндиктин компактуу камтылуучу мейкиндиктери болушат.

3. Евклиддик түз сызык E_1, евклиддик тегиздик E_2, евклиддик мейкиндик E_3 - компактуу эмес тпологиялык мейкиндиктер.

14-Теорема. $(X,\Im_X)$ топологиялык мейкиндигинин $A \subset X$ камтылуучу көптүгү компактуу болушу үчүн бул көптүктүн каалагандай ачык каптоосунун камтылуучу чектүү каптоосуу жашашы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) зарылдык шарты. A көптүгү компактуу болсун деп алалы. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - анын каалагандай ачык каптоосу болсун: $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, $U_\alpha \in \Im_X$. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ катоосунан чектүү сандагы көптүктөрдү кармаган камтылуучу каптоону бөлүп алабыз. Ал үчүн U_α көптүктөрүнүн A көптүгү менен кесилиштерин карайбыз жана аларды $V = U_\alpha \cap A$ аркылуу белгилейли. V_α көптүктөрү $(A,\Im_A)$ мейкиндигинде ачык көптүктөр болушат жана A көптүгүнүн каптоосун түзүшөт:

$$A = A \cap \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha .$$

A көптүгү компактуу болгондуктан, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ каптоосунан кандайдыр бир камтылуучу (чектүү сандагы $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, ..., V_{\alpha_k}$ көптүктөрдөн турган) каптоосун бөлүп алууга болот. Бирок, анда $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_k}$ көптүктөрү A көптүгүнүн эң алгачкы каптоосунун изделүүчү камтылуучу каптоосун түзүшөт:

$$A = \bigcup_{i=1}^{K} V_{\alpha_i} \subset \overset{K}{U} U_{\alpha_i} .$$

2) жетиштүүлүк шарты жогорудагыга окшош эле далилденет. Бул далилдөөнү окурманга өз алдынча иштөө үчүн тапшырма

катары сунуштайбыз.

15-Теорема. $(X,\Im)$ компактуу топологиялык мейкиндигинин $A \subset X$ туюк камтылуучу көптүгү компактуу болот.

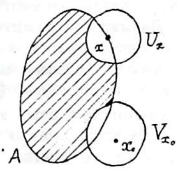
Далилдөө. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - A көптүгүнүн каалагандай каптоосу (мындагы U_α – X көптүгүндөгү ачык көптүктөр) болсун. 14-Теореманын негизинде ушул каптоонун чектүү камтылуучу каптоосун бөлүп көрсөтүү жетиштүү. Ал үчүн U_α көптүктөрүнө $X \setminus A$ ачык көптүгүн кошуп алалы. Анда биз $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигинин ачык каптоосуна ээ болобуз. Ал эми теореманын шарты боюнча $(X,\Im)$ - компактуу мейкиндик болгондуктан, анын ушул пайда болгон ачык каптоосунан чектүү камтылуучу каптоосун бөлүп алуу мүмкүн жана бул камтылуучу каптоого $X \setminus A$ көптүгү кирет деп эсептөөгө болот.

Мисалы

$X = U_{\alpha_1}, \cup ... \cup U_{\alpha_k} \cup (X \setminus A)$.

Мындан $U_{\alpha_1},...,U_{\alpha_k}$ көптүктөрү A көптүгүнүн изделип жаткан чектүү камтылуучу каптоосун түзүшө тургандыгы келип чыгат. (ч.т.д.)

Бирок, көптүктүн компактуу болушунан ар дайым эле анын туюк көптүк болушу келип чыга бербейт.



14-чийме

16-Теорема. $(X,\Im)$ хаусдорфтук топологиялык мейкиндигинин A компактуу камтылуучу көптүгү туюк болот.

Далилдөө. $X \setminus A$ көптүгү ачык көптүк экендигин далилдейбиз. Бул үчүн каалагандай $x_0 \in (X \setminus A)$ чекити үчүн анын A көптүгү менен кесилишпей турган чеке-белин табуу жетиштүү. $(X,\Im)$ хаусдорфтук мейкиндик болгондуктан ар кандай $x \in A$ чекитинин ушундай U_x чеке-бели жашайт жана ал x_0 чекитинин кандайдыр бир V_{x_0} чеке-бели менен кесилишпейт (14-чийме). U_x сыяктуу мүмкүн болгон бардык чеке-белдер A көптүгүнүн ачык каптоосун түзүшөт: $A \subset \bigcup_{x\in A} U_x$. Ал эми A көптүгү компактуу болгондуктан бул каптоонун кандайдыр бир чектүү камтылуучу каптоосу табылат: $A \subset U_{x_1}, \cup ... \cup U_{x_k}$ (кандайдыр бир $x_1, x_2, ..., x_k \in A$ чекиттери үчүн). Эми x_0 чекитинин биз издеп жаткан чеке-бели катары $V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_k}$ ушул ачык көптүктү алууга болот. Бул көптүк A көптүгү менен кесилишпейт, кала берсе бул көптүк $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_k}$ көптүгү менен да кесилишпейт. Ушуну көрсөтөлү. $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ - каалаган чекит болсун. x чекити V_{x_i} көптүгүнүн ар бирине таандык болгондуктан, бул чекит $U_x, U_{x_2}, ..., U_{x_k}$ көптүктөрүнүн бирине да таандык болбойт. Демек, x чекити бул көптүктөрдүн биригүүсүнө да таандык болбойт. (ч.т.д)

Натыйжа. Метрикалык мейкиндиктеги компактуу көптүк туюк болот.

Жогоруда далилденген теореманы жана ар кандай метрикалык мейкиндик хаусдорфтук мейкиндик боло тургандыгын пайдаланып натыйжаны далилдөөнү өз алдынча иш үчүн тапшырма катары сунуштайбыз.

Метрикалык мейкиндиктеги компактуу көптүктөр туюк болуудан башка да өзгөчө касиеттерге ээ болушат.

17-Теорема. (M, ρ) метрикалык мейкиндигиндеги A компактуу көптүгү чектелген көптүк болот.

Далилдөө. A көптүгүн толук камтып турган шардын жашашын көрсөтүшүбүз керек.

$\forall a \in M$ чекитин алабыз. борбору ушул чекит болгон мүмкүн болгон бардык $B\ (a, r_K)$ ачык шарлардын көптүгү (M, ρ) мейкиндигинин ачык каптоосу болуп эсептелет жана ушул көптүк A көптүгүнүн да ачык каптоосу болот. Шарт боюнча A компактуу көптүк болгондуктан, бул ачык каптоосунун чектүү камтылуучу каптоосу жашайт. Айталы кандайдыр бир $r_1, r_2, ..., r_K > 0$лар үчүн $A \subset B(a, r_1) \cup ... \cup B(a, r_K)$ болсун дейли. Анда изделип жаткан шар үчүн $B(a, r_K)$ шарларынын арасынан эң чоңун алууга болот: $A \subset B(a, R)$ (мында $R = \max(r_1, ..., r_K)$). (ч.т.д.)

Ошентип, мейкиндикте компактуу көптүктөр туюк жана чектелген болушат экен.

Натыйжа. R сандык түз сызыктын $A \subset R$ компактуу камтылуучу көптүгү өзүнүн накта жогорку жана төмөнкү чектерин кармап турат.

Далилдөө. Aкомпактуу көптүк болгондуктан, ал чектелген жана накта жогорку чеги C - чектүү сан болот: $C = \sup A = \sup_{x \in A} x \in R$.

Бул сандан кичине болгон сандар A көптүгүнүн жогорку чеги боло алышпайт, б.а. C чекитинин жетишерлик кичине чеке-белинен A көптүгүнүн чекиттери табылат. Демек, C чекити A көптүгүнүн жалгашуу чекити болот. Шарт боюнча A компактуу көптүк болгондуктан, ал туюк болот жана C чекитин кармап турат.

A көптүгү өзүнүн накта төмөнкү чегин кармап турушу жогорудагыга окшош эле далилденет. (ч.т.д.)

Далилденгендер боюнча евклиддик мейкиндиктеги компактуу көптүктөрдүн бардыгы туюк жана чектелген болушат экен. Тескерисинче ырастоо да туура болот: евклиддик мейкиндиктеги көптүктүн туюк жана чектелген болушунан ал көптүктүн компактуу экендиги келип чыгат.

18-Теорема. (Евклиддик мейкиндиктеги компактуулуктун критерийи) A көптүгү R^n евклиддик мейкиндигинде компактуу болушу үчүн ал көптүктүн туюк жана чектелген болушу зарыл жана жетиштүү.

Бул теореманын далилдөөсүнө токтолбойбуз, кызыккан окурман үчүн өз алдынча иштөөгө сунуштайбыз.

§9. БАЙЛАНЫШТУУЛУК. ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИКТИН КОМПОНЕНТАЛАРЫ

$(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигин карайбыз.

Аныктоо. Эгерде X көптүгүнүн каптоосу төмөндөгүдөй эки шартты канааттандырса: 1) каптоонун бардык элементтери бош эмес көптүктөр болсо; 2) каалагандай эки ар түрдүү элементинин кесилиши бош көптүк болсо, анда мындай каптоосу X көптүгүнүн *ажыралышы* деп аталат.

Аныктоо. Эгерде $(X,\mathfrak{I}_X)$ топологиялык мейикндигинин эки ачык көптүктөн турган ажыралышы жашабаса, анда ал *байланыштуу* топологиялык мейкиндик деп аталат. $A\subset X$ көптүгүн алалы. Эгерде $(A,\mathfrak{I}_A)$ камтылуучу топологиялык мейкиндиги байланыштуу камтылуучу мейкиндик болсо, анда A байланыштуу көптүк деп аталат.

Көптүктүн эки бош эмес көптүктөргө ажыралышы ошол эле учурда анын эки бош эмес туюк көптүктөргө ажыралышы да болуп эсептелгендиктен, байланыштуулук түшүнүгүн туюк көптүктөрдүн жардамы менен да берүүгө болот: мейкиндиктин байланыштуу болушу үчүн анын эки бош эмес туюк көптүктөргө ажыралбас болушу зарыл жана жетиштүү.

$A\subset(X,\mathfrak{I}_X)$ көптүгү мейкиндиктин (X көптүгүнүн) өзү менен дал келбеген учурда гана ал көптүктүн толуктоочусу бош эмес көптүк болушун жана ачык көптүктүн толуктоочусу туюк көптүк экендигин эске алып, байланыштуу мейкиндиктин дагы бир аныктоосуна ээ болобуз.

Аныктоо. Эгерде $(X,\mathfrak{I})$ мейкиндигинде бир эле учурда ачык да, туюк да болушкан эки гана көптүк (X көптүгү жана $\emptyset$) бар болсо, анда ал мейкиндик байланыштуу мейкиндик деп аталат.

Мисалдар. 1) Каалаган антидискреттик мейкиндик байланыштуу болот.

2) Бирден көп элементтерге ээ болгон дискреттик мейкиндик байланыштуу эмес болот.

3) Сандык түз сызык R байланыштуу мейкиндик болот.

$A \subset (X, \Im_X)$ көптүгүн карайлы.

Аныктоо. Эгерде $(A, \Im_A)$ камтылуучу топологиялык мейкиндиги байланыштуу болсо, анда A көптүгү байланыштуу көптүк деп аталат, б.а. $\exists U, V \in \Im_X$: $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $U \cap A \cap V = \emptyset$, $U \cup V = A$ болсо, анда A *байланыштуу көптүк* деп аталат.

Мисалдар, 1) Антидискреттик мейкиндиктеги каалаган көптүк байланыштуу болот.

2) Дискреттик мейкиндикте жок дегенде эки чекиттен турган каалагандай көптүк байланыштуу эмес.

3) $(0,1) \subset R$ интервалы байланыштуу экендигин кийинчерээк далилдейбиз.

4) Төмөндөгү көптүктөр R мейкиндигинде байланыштуу эмес: а) $[0,1) \cup [2,3]$; б) N, Q көптүктөрү; в) Каалагандай чектүү көптүк.

$A \subset R$ болсо, ал эми A көптүгү a жана b чекиттерин кармап, бирок бул чекиттердин арасындагы $(a < c < b)$ чекиттерди кармабаса, анда A көптүгү байланыштуу болбойт.

19-Теорема. (Байланыштуулуктун критерийи).

Топологиялык мейкиндиктин байланыштуу болушу үчүн ар кандай эки чекити кандайдыр бир байланыштуу көптүккө таандык болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. 1) зарылдык шарты түшүнүктүү, б.а. ар кандай эки чекитин кармап турган байланыштуу көптүк – мейкиндиктин өзү болот.

2) Жетиштүүлүк шарты. $(X, \Im)$ топологиялык мейкиндигинин ар кандай эки чекити кандайдыр бир байланыштуу көптүктө кармалып турсун дейли. Бирок, $(X, \Im)$ - байланыштуу эмес деп болжолдойлу, б.а. $X = U \cup V$, $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, $U, V \in \Im$, $U \cap V = \emptyset$ болсун дейли. Бул U жана V көптүктөрүнүн ар биринен бирден чекит алалы: $a \in U, b \in V$. K аркылуу ушул a жана b чекиттерин кармап турган байланыштуу көптүктү белгилейли (жетиштүүлүк шартында ушундай көптүк жашайт деп алганбыз). Анда U жана V көптүктөрү K көптүгүнүн каптоосун түзүшөт. $U \cap K \neq \emptyset$, б.а. $U \cap K = a$, $V \cap K = b$, ал эми $U \cap V \cap K = \emptyset$, себеби $U \cap V \cap K \subset U \cap V = \emptyset$. Бул болсо шарт боюнча K байланыштуу

көптүк экендигине каршы келет. Демек, $(X,\Im)$ - байланыштуу мейкиндик экен. (ч.т.д.)

Интервалдардын байланыштуулугу

Лемма. Каалагандай $[a,b]$ кесиндиси байланыштуу көптүк болот.

Далилдөө. Бул кесинди эки ачык камтылуучу (ушул кесиндиде) көптүктөргө ажырасын деп алалы: $[a,b]=A\cup B$. Эгерде, мисал үчүн, $a\in A$ болсо, анда $B=\emptyset$ экендигин көрсөтөбүз. ал үчүн α аркылуу A көптүгүндө камтылып турган эң чоң жарым ачык интервалдын $[a,\alpha)\subset A$ оң жактагы учун белгилейли. B көптүгү ачык көптүк экендигинен $\alpha\notin B$ келип чыгат. Демек, $\alpha\in A$. Бирок, мындан A - ачык көптүк экендигин эске алсак, төмөндөгүнү алабыз: $\alpha=b$, $A=[a,b]$, $B=\emptyset$. Лемма далилденди.

20-Теорема. R сандык түз сызыктын $A\subset R$ көптүгү байланыштуу болушу үчүн анын интервал болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. Зарылдык шарты түшүнүктүү. Жетиштүүлүк шартын далилдөө үчүн байланыштуулук критерийи менен лемманы пайдаланабыз. Чындыгында, эгерде A - интервал болсо, анда анын каалагандай эки чекити байланыштуу $[a,b]$ көптүгүндө кармалып турат.

Натыйжа. R сандык түз сызыгы байланыштуу көптүк болот. (ч.т.д.)

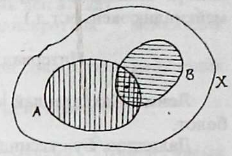
Байланыштуу көптүктөрдүн кээ бир касиеттерин карайлы.

21-Теоерма. Байланыштуу көптүктүн туюкталышы да байланыштуу көптүк болот.

Далилдөө. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигинин $A\subset X$ байланыштуу көптүгүн алалы. Анын туюкталышы $\overline{A}$ - байланыштуу эмес көптүк болсун деп болжолдойлу, б.а. $\overline{A}\subset U\cup V$, U,V ачык көптүктөр жана $U\cap\overline{A}\neq\emptyset$, $V\cap\overline{A}\neq\emptyset$, $U\cap V\cap\overline{A}=\emptyset$ болсун дейли. A - байланыштуу көптүк болгондуктан, анын U жана V көптүктөрүнүн бири менен кесилиши $\emptyset$ болот. Аныктык үчүн $U\cap A=\emptyset$ деп эсептейли. Бул болсо $A\subset X\setminus U$ (мында $X\setminus U$ - туюк көптүк) экендигин билдирет. Бирок, анда $\overline{A}\subset X\setminus V$ болот, б.а. $\overline{A}\cap U=\emptyset$. Бул карама-каршылык теореманы далилдейт. (ч.т.д.)

22-Теоерма. Жок дегенде бир жалпы чекитке ээ болушкан эки байланыштуу көптүктөрдүн биригүүсү да байланыштуу көптүк болот.

Далилдөө. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндик, $A\subset X,\ B\subset X,\ A\cap B\neq\emptyset$ A,B - байланыштуу көптүктөр болушсун. $C=A\cup B$ көптүгү байланыштуу эмес деп болжолдойлу. Анда $C\subset U\cup V$ экендиги келип чыгат, мында



15-чийме

U,V - ачык көптүктөр жана $U\cap C\neq\emptyset,\ V\cap C\neq\emptyset, U\cap V\cap C=\emptyset$. A,B - көптүктөрүнүн байланыштуу экендиктеринен булардын ар бири U,V көптүктөрүнүн биринде толугу менен камтылып жана экинчиси менен кесилишпей тургандыгы келип чыгат (байланыштуу көптүктүн аныктоосунан карагыла). Мисалы $A\subset U$ деп алалы. Эгерде $B\subset U$ болсо, анда $C\cap V=\emptyset$; эгерде $B\subset V$ болсо, анда $A\cap B\subset U\cap V\cap C=\emptyset$. Эки учурда тең карама-каршылыкка келдик. (ч.т.д.) □

Бул теореманы бош эмес кесилишке ээ болушкан байланыштуу көптүктөрдүн каалагандай системасы үчүн жалпылоого болот.

23-Теорема. Жалпы чекитке ээ болушкан байланыштуу көптүктөрдүн тобунун биригүүсү да байланыштуу көптүк болот.

Далилдөө. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - X топологиялык мейкиндигиндеги байланыштуу көптүктөрдүн системасы болсун, $x_0 - A_\alpha$ көптүктөрүнүн жалпы чекити деп эсептейли: $x_0\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. Байланыштуулуктун критерийине ылайык $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ көптүгүнүн байланыштуу экендигин далилдөө үчүн бул көптүктүн эки a,b чекиттери үчүн алардын экөөнү тең кармап турган $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ көптүгүнүн камтылуучу көптүгү жашай тургандыгын көрсөтүүжетиштүү. Эгерде мисал үчүн, $a\in A_\alpha$, $b\in A_\beta$ болсо (кандайдыр бир $\alpha,\beta\in I$ индекстери үчүн), анда изделүүчү көптүк $A_\alpha\cup A_\beta$ болот. Бул көптүктүн байланыштуу экендиги мурдагы теореманын негизинде келип чыгат. (ч.т.д.)

Топологиялык мейкиндиктин компоненталары.

Топологиялык мейкиндиктин максималдык байланыштуу камтылуучу көптүктөрү өзгөчө мааниге ээ.

Аныктоо. X мейкиндигинин байланыштуулук компонентасы деп анын эч кандай эң чоң байланыштуу камтылуучу көптүгүндө кармалып турбаган байланыштуу камтылуучу көптүгүн атайбыз.

24-Теорема. Байланыштуулуктун эки компонентасы же кесилишпейт, же дал келишет.

Далилдөө. Эки кесилишүүчү компоненталардын биригүүсү байланыштуу көптүк (жогоруда далилденген) болот жана бул биригүү компоненталардын экөөнү тең камтып турат. Аныктоо боюнча компоненталар бул биригүү менен дал келиштери керек, демек, бири-бири менен дал келишет. (ч.т.д.)

25-Теорема. Ар бир чекит мейкиндиктин кандайдыр бир байланыштуулук компонентасында кармалып турат.

Далилдөө. Берилген чекитти кармап турган бардык байланыштуу көптүктөрдүн арасында эң чоңу жашайт: ал бардык байланыштуу көптүктөрдүн биригүүсү болот. Алдыдагы теореманын негизинде бул биригүү байланыштуу болот. (ч.т.д.)

Акыркы эки теорема бирдикте төмөндөгүнү билдирет: ар кандай топологиялык мейкиндик өзүнүн эки-экиден кесилишпөөчү байланыштуулук компоненталарынын биригүүсү болуп эсептелет. Башкача айтканда, байланыштуулук компоненталары мейкиндиктин *ажыралышын* (разбиение) түзүшөт. Байланыштуулук компоненталарын жөн эле *байланыштуу компоненталар* же *компоненталар* деп да атап коюшат.

Эскертүү. $(X,\Im)$ топологиялык мейкиндигиндеги хаусдорфтуулук, компактуулук жана байланыштуулук түшүнүктөрү X көптүгүндөгү бардык ачык камтылуучу көптүктөрдүн $\Im$ системасына коюлган тиешелүү шарттардын жардамында аныкталыша тургандыгын көрдүк. Демек, мейкиндиктин хаусдорфтуу, компактуу жана байланыштуу болуш касиеттери гомеоморфтук чагылтууларда сакталат.

Практикалык сабак жана студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн мисалдар.

1. E_2 евклиддик тегиздигиндеги γ гиперболасы байланыштуу эмес көптүк боло тургандыгы далилденсин.

2. E_2 тегиздигиндеги γ параболасы байланыштуу көптүк экендиги көрсөтүлсүн.

Байланыштуулук

1. а) Рационалдык сандардын көптүгү $Q\subset R$ байланыштуу эмес экендигин далилдегиле.

Бул көптүктүн байланыштуу камтылуучу көптүктөрү кандай болушат?

б) X - экиден кем эмес элементи бар көптүк болсун. $(X,\Im_D)$ дискреттик топологиялык мейкиндигинде жалаң гана бир элементтүү камтылуучу көптүктөрү байланыштуу болуша тургандыгын, ал эми $(X,\Im_T)$ - антидискреттик топологиялык мейкиндигинде каалагандай $F\subset X$ камтылуучу көптүгү байланыштуу көптүк экендигин далилдегиле.

в) R^2 мейкиндигинин төмөндөгү камтылуучу көптүгүнүн кайсылары байланыштуу болушат:
$\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, $\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$, $\{(x,y)|x^2+y^2\neq 1\}$

г) R^3 мейкиндигинин төмөндөгү камтылуучу көптүктөрүнүн кайсылары байланыштуу болушат:
$\{(x,y,z)|x^2+y^2-z^2=1\}$, $\{(x,y,z)|x^2+y^2-z^2-1\}$, $\{(x,y,z)|x\neq 1\}$

д) X топологиялык мейкиндиги байланыштуу болушу үчүн бул мейкиндикти экиден кем эмес чекиттерди кармаган Y дискреттик топологиялык мейкиндикке каалагандай f үзгүлтүксүз чагылтуусу турактуу болушу зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.

е) $A-X$ топологиялык мейкиндигинин камтылуучу байланыштуу мейкиндиги болсун жана $A\subset Y\subset \overline{A}$ орун алсын. Анда Y - байланыштуу көптүк экендигин далилдегиле.

ж) Y_0 жана $\{Y_j\}_{j\in I}$ - X топологиялык мейкиндигинин байланыштуу камтылуучу көптүктөрү болсун. Эгерде $Y_0\cap Y_j\neq\emptyset$ $(\forall j\in I)$ болсо, анда $Y=Y_0\cup\left(\bigcup_{j\in I}Y_j\right)$ көптүгү байланыштуу экендигин далилдегиле.

з) A жана B - R^2 мейкиндигинин төмөндөгүдөй камтылуучу көптүктөрү болсун:

$$A=\{(x,y)|x=0,-1\leq y\leq 1\}$$

$$B=\left\{(x,y)\middle|\ 0\leq x\leq 1,\ y=\cos\frac{\pi}{x}\right\}$$

$X=A\cup B$ көптүгү байланыштуу экендигин далилдегиле (көрсөтмө: A жана B көптүктөрү байланыштуу экендигин далилдегиле, андан кийин $X=U\cup V$ көптүгүн карагыла, мында U жана $V-X$ көптүгүндө бир эле учурда ачык жана туюк көптүктөр болушсун. A көптүгүнүн кандайдыр бир чекити U көптүгүнө таандык деп алгыла).

4) A жана B - R^2 мейкиндигинин төмөндөгүдөй камтылуучу көптүктөрү болсун:

$$A=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leq x\leq 1, y=0\right\}$$

$$B=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,\ y=\frac{x}{n},\ n\in N\right\}$$

$A\cup B=X$ - байланыштуу көптүк экендигин далилдегиле.

Хаусдорфтуулук

1. X - компактуу топологиялык мейкииндик, Y - хаусдорфтук топологиялык мейкиндик, $f:X\to Y$ - үзгүлтүксүз сюрьективдүү чагылтуу болсун. Төмөндөгү ырастоону далилдегиле:

$U\subset Y$ камтылуучу көптүгү ачык болушу үчүн $f^{-1}(U)\subset X$ камтылуучу көптүгү ачык болушу зарыл жана жетиштүү (көрсөтмө: $F\subset Y$ камтылуучу көптүгү туюк болушу үчүн $f^{-1}(F)\subset X$ камтылуучу көптүгү ачык көптүк болушу зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле).

2. Y топологиялык мейкндиги хаусдорфтук мейкиндик болушу үчүн $D=\{(y_1,y_2)\in Y\times Y|y_1=y_2\}$ көптүгү $Y\times Y$ көптүгүндө туюк болушу зарыл жана жетиштүү экендигин далилдегиле.

3. $f:X\to Y$ - үзгүлтүксүз чагылтуу болсун. Төмөндөгү ырастоону далилдегиле: Эгерде X - хаусдорфтук мейкиндик болсо, анда $\{(x_1,x_2)\in X\times X|f(x_1)=f(x_2)\}$ көптүгү $X\times X$ көптүгүндө туюк көптүк болот.

4. $f:X\to Y$ үзгүлтүксүз, сюрьективдүү чагылтуу болсун жана бул чагылтууда X көптүгүнүн ар кандай ачык камтылуучу $U\subset X$ көптүгүнүн элеси $f(U)-Y$ көптүгүндө ачык көптүк болсун. Төмөндөгү ырастоону далилдегиле: Y - хаусдорфтук мейкиндик болушу үчүн $\{(x_1,x_2)\in X\times X|f(x_1)=f(x_2)\}$ көптүгү $X\times X$ көптүгүндө туюк көптүк болушу зарыл жана жетиштүү.

§10. ТОПОЛОГИЯЛЫК КӨП ТҮСПӨЛДҮҮЛҮКТҮН АНЫКТООСУ, МИСАЛДАРЫ

1. $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндигин карайбыз.

Аныктоо. Бул мейкиндиктеги k*-ченемдүү координаталар системасы* деп кандайдыр бир $U\subset X$ ачык көптүгүн R^n мейкиндигиндеги ачык көптүккө φ гомеоморфтук чагылтуусун атайбыз. Ал эми (U,φ) түгөйү k*- ченемдүү карта* деп аталат, U көптүгүн болсо бул картанын *координаталык чеке-бели* деп атап коюшат.

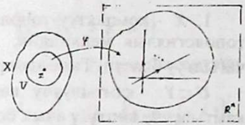
Эгерде $x \in U$ болсо, анда $\varphi(x)=\left(x^1, x^2, ..., x^k\right) \in R^k$. Мындагы x^i чыныгы сандары x чекитинин берилген картадагы координаталары деп аталышат.

Аныктоо. Эгерде $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндиги төмөндөгү шарттарды канааттандырса:

1) бул мейкиндик хаусдорфтук мейкиндик болсо;

2) $\mathfrak{I}$ топологиясынын санаттык сандагы базасы жашаса;

3) k-ченемдүү карталардын координаталык чеке-белдери



16-чийме

менен $(X,\mathfrak{I})$ мейкиндигин каптоого мүмкүн болсо (б.а. $X=\bigcup_{i\in I} U_i$, U_i - k - ченемдүү $\varphi_i : U_i \to V \subset R^n$ карталарынын координаталык чеке-белдери), анда $(X,\mathfrak{I})$ топологиялык мейкиндиги *k-ченемдүү топологиялык көп түспөлдүүлүк* деп аталат.

Биз жалаң гана бир ченемдүү жана эки ченемдүү тополгиялык көп түспөлдүүлүктөрдү карайбыз.

Мисалдар. 1) R^k $(k=1,2)$ сандык мейкиндиги топологиялык көп түспөлдүүлүк болот.

(U,φ) - k-ченемдүү картасын төмөндөгүдөй аныктайбыз: $U \equiv R^k$, $\varphi : U \to U$ - теңдеш чагылтуу.

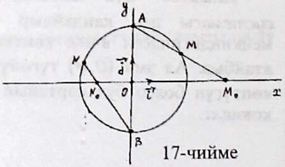
Демек, R^k - k-ченемдүү көп түспөлдүүлүк болот экен.

2) A_k, E_k $(k=1,2)$ - аффиндик жана евклиддик мейкиндиктери да k - ченемдүү көп түспөлдүүлүктөр болушат (өз алдыңарча текшергиле).

3) E_2 тегиздигинде O борборлуу r радиустуу айлананы карайлы жана аны γ аркылуу белгилейли. Ушул айлана бир ченемдүү көп түспөлдүүлүк боло тургандыгын көрсөтөлү. Тегиздикте $R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ тик бурчтуу координаталар системасын алабыз.

Айлана менен (Oy) огунун кесилиш чекиттерин A жана B аркылуу белгилейбиз.

$U_1=\gamma \setminus \{A\}$, $U_2=\gamma \setminus \{B\}$ көптүктөрүн карайлы:



17-чийме

$U_1 -$ "A чекитинде көзөлгөн" айлана, $U_2 -$ "B чекитинде көзөлгөн" айлана.

$\varphi_1 : U_1 \to (Ox)$ жана $\varphi_2 : U_2 \to (Ox)$ чагылтууларын төмөндөгүдөй аныктайбыз: $\forall M \in U_1 : \varphi_1(M) = M_0$, мында M_0 - $[AM)$ шооласы менен (Ox) огунун кесилиши, ал эми $\forall N \in U_2 : \varphi_2(N) = N_0$, $N_0 - [BN)$ шооласы менен (Ox) огунун кесилиши. $U_1, U_2 - \gamma$ айланасында камтылган ачык көптүктөр, $\varphi_1 - U_1 \subset \gamma$ ачык көптүгүн $(Ox) \equiv R$ сандык түз сызыгына чагылтуу, ал эми $\varphi_2 - U_2 \subset \gamma$ ачык көптүгүн $(Ox) \equiv R$ сандык түз сызыкка гомеоморфтук чагылтуу болот. Бул карталардын координаталык чеке-белдери болгон U_1, U_2 көптүктөрү γ айланасынын каптоосу болот: $\gamma = U_1 \cup U_2$. Демек, айлана – бир ченемдүү топологиялык көп түспөлдүүлүк.

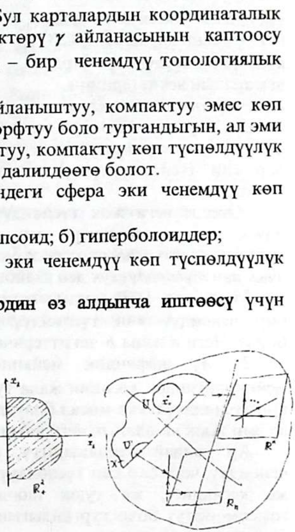
Ар кандай бир ченемдүү, байланыштуу, компактуу эмес көп түспөлдүүлүк түз сызыкка гомеоморфтуу боло тургандыгын, ал эми каалаган бир ченемдүү, байланыштуу, компактуу көп түспөлдүүлүк айланага гомеоморфтуу экендигин далилдөөгө болот.

4) E_3 евклиддик мейкиндигиндеги сфера эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк болот.

5) E_3 мейкиндигиндеги а) эллипсоид; б) гиперболоиддер; в) параболоиддер; г) цилиндрлер эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк болушат.

4), 5) мисалдарды студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн тапшырма катары сунуштайбыз.

Сфера менен эллипсоид – компактуу эки өлчөмдүү көп түспөлдүүлүккө мисал болушат, ал эми гиперболоиддер параболоиддер жана цилиндрлер – эки ченемдүү компактуу эмес көп түспөлдүүлүктөрдүн мисалдары.

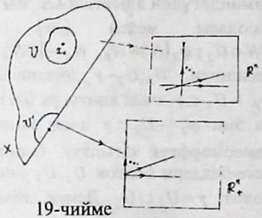


18-чийме

2. Геометрияда "чеги бар көп түспөлдүүлүк" деп аталган көп түспөлдүүлүктөр көп кездешет.

$(X, \mathfrak{T})$ - n -ченемдүү көп түспөлдүүлүгүн карайбыз.

Аныктоо. Эгерде $x_0 \in (X, \mathfrak{T})$ чекитинин R^n мейкиндигине гомеоморфтуу боло тургандай чеке-бели жашаса, анда x_0 чекити *ички* чекит деп аталат (топологиялык мейкиндиктеги көптүктүн ички чекити менен алмаштырбагыла жана адаштырбагыла!). Эгерде $x_0 \in (X,\Im)$ чекитинин R^n_+ жарым мейкиндигине гомеоморфтуу болгон U чекебели жашап жана $f: U \to R^n_+$ гомеоморфтуу чагылтуусунда x_0 чекити R^n_+ жарым мейкиндигинин чегинде жаткан чекитке өтсө, анда x_0 чекити *чек аралык чекит* деп аталат (19-чиймени караңыз). $(X,\Im)$ көп түспөлдүүлүгүнүн бардык чек аралык чекиттеринин



19-чийме

көптүгү анын *чеги* деп аталат жана ∂X көрүнүшүндө белгиленет. Өзүнүн бардык чекиттери ички чекиттер болгон көп түспөлдүүлүк *чеги жок көп түспөлдүүлүк* деп аталат, ал эми чек аралык чекиттери бар көп түспөлдүүлүктү *чеги бар көп түспөлдүүлүк* деп атап коюшат.

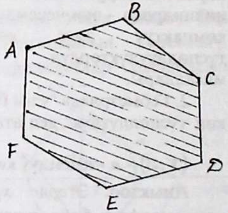
Эгерде чеги жок түспөлдүүлүк компактуу болсо, анда аны *туюк көп түспөлдүүлүк* деп аташат. Эгерде чеги жок көп түспөлдүүлүктүн компактуу компоненталары жок болсо, анда аны *ачык көп түспөлдүүлүк* деп атайбыз.

Мисалдар. 1) R сандык түз сызыктын $[a,b]$ кесиндиси чеги бар бир ченемдүү көп түспөлдүүлүк (индуцирленген топологияда) болот. Чеги a жана b чекиттеринен турат.

2) A_3 аффиндик мейкин-дигиндеги (же E_3 евклиддик мейкиндигинде) кесинди жана туюк шоола бир ченемдүү чеги бар көп түспөлдүүлүккө мисал болушат. Кесиндинин чеги анын учтары, ал эми туюк шооланын чеги анын башталыш чекити болот.

Ар кандай байланыштуу, бир ченемдүү, чеги бар көп түспөлдүүлүк же кесиндиге, же туюк шоолага гомеоморфтуу боло тургандыгын өз алдыңарча далилдегиле.

3) E_2 евклиддик тегиздигиндеги томпок көп бурчтук эки ченемдүү, чеги бар көп түспөлдүүлүк болот. Анын чеги болуп $ABCDEF$ сынык сызыгы эсептелет.



20-чийме

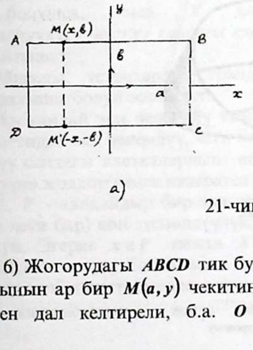
Бул көп бурчтуктун ичи - эки ченемдүү, чеги жок көп түспөлдүүлүк.

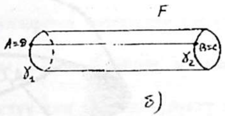
4) E_2 тегиздигинде a түз сызыгын алалы. Анда бул түз сызык тегиздикти эки ачык жарым тегиздиктерге ажыратат. Эгерде бул ачык жарым тегиздиктердин бирин a түз сызыгынын чекиттери менен бирге карасак, анда ал – чеги a түз сызыгы болгон эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк болот. Бирок бул – чеги бар, бирок компактуу эмес көп түспөлдүүлүктүн мисалы болуп эсептелет.

5) E_3 евклиддик мейкиндигинде $R=\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ тик бурчтуу координаталар системасын алабыз жана (Oxy) тегиздигинде жаткан тик бурчтукту карайбыз:

$ABCD=\{M(x,y,0)\,\|x|\le a,\ |y|\le b\}$, мында $a>0,\ b>0$. Тик бурчтуктун $[AB]$ жагынын ар бир $M(x,b)$ чекитин $[DC]$ жагынын $M'(x,-b)$ чекитине дал келтирели (мында M жана M' чекиттери (Ox) огуна карата симметриялуу). Анда тик бурчтук цилиндрдин каптал бетине окшогон (21-чийме, б)) F фигурасына айланат. E_3 мейкиндигинин топологиясы F фигурасында кандайдыр бир T топологиясын индуцирлейт (б.а. жаратат). (F,T) мейкиндиги – эки ченемдүү, чеги бар көп түспөлдүүлүк болот. Анын чеги γ_1 жана γ_2 сызыктарынан турат. Бул сызыктардын ар бири айланага гомеоморфтуу болушат.

Ушундайча пайда болгон (F,T) көп түспөлдүүлүгүн *тутка* (ручка) деп аташат. Бул тутка $ABCD$ тик бурчтугунун карама-каршы эки жагын жогоруда көрсөтүлгөндөй "клейлөө" (же "жабыштыруудан", "чаптоодон") пайда болду деп айтышат.

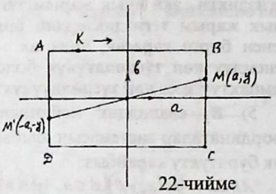




21-чийме

6) Жогорудагы $ABCD$ тик бурчтугун карайбыз. Эми анын $[BC]$ жагынын ар бир $M(a,y)$ чекитин $[DA]$ жагынын $M'(-a,-y)$ чекити менен дал келтирели, б.а. O чекитине карата симметриялуу

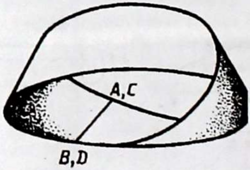
болушкан чекиттерин дал келтиребиз (22-чийме). Натыйжада Φ фигурасына ээ болобуз. E_3 мейкиндигинин топологиясы Φ фигурасында кандайдыр бир $\mathfrak{I}_*$ топологияны жаратат. $(\Phi, \mathfrak{I}_*)$ камтылуучу (E_3 мейкиндигине) топологиялык мейкиндиги *Мебиустун*[3] *барагы* деп аталат жана ал чеги бар эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк болот (23-чийме).



22-чийме

Мебиустун барагы эң жөнөкөй "бир жактуу" бет болуп эсептелет. Ушуну түшүндүрөлү: кадимки беттин эки жагы болот, бир жагын көк түскө, экинчисин кызыл түскө боеп чыксаңар, бул эки түс эч качан бири-бирине кездешпейт. Ал эми Мебиустун барагынын каалаган жеринен боеп баштасаңар, анда ал фигура толугу менен боелуп калат.

Бул фигуранын чегинин түзүлүшүн изилдеп көрөлү. Ал үчүн A чекитинен баштап чекти сызып чыга турган K чекитин карайбыз. K чекити $[AB]$ кесиндисин сызып келип D чекитинде болуп калат (себеби $B \equiv D$, булар бир чекит катары каралат). Андан ары бул чекит $[DC]$ кесиндисин сызып келип, A чекитинде болуп калат (себеби $C \equiv A$). Демек, Мебиустун барагынын чеги бир ченемдүү, компактуу көп түспөлдүүлүк экен жана ал айланага гомеоморфтуу болот.



23-чийме

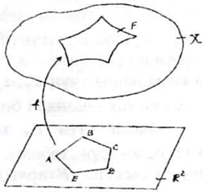
[3] А.Ф.Мебиус (1790-1868) – немец математиги жана астроному

§11.КЛЕТКАЛЫК АЖЫРАЛЫШ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК. КӨП ТҮСПӨЛДҮҮЛҮКТҮН ЭЙЛЕРДИК МҮНӨЗДӨМӨСҮ. ОРИЕНТИРЛЕНҮҮЧҮ ЖАНА ОРИЕНТИРЛЕНБӨӨЧҮ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ КӨП ТҮСПӨЛДҮҮЛҮКТӨР

$(X,\mathfrak{J})$ - эки ченемдүү топологиялык көп түспөлдүүлүгүн карайлы.

1. **Аныктоо.** *Клетка* деп R^2 мейкиндигиндеги томпок көп бурчтукка гомеоморфтуу болгон каалагандай чеги бар $F \subset X$ көп түспөлдүүлүгүн атайбыз. $f: ABCD \to F$ гомеоморфизм болсун (23-чийме). Көп бурчтуктун чокуларынын элестери - *клетканын чокулары* деп, ал эми көп бурчтуктун жактарынын элестери – *клетканын жактары* деп аталат (24-чийме).

$\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ – X эки ченемдүү көп түспөлдүүлүгүндөгү клеткалардын кандайдыр бир көптүгү болсун.



24-чийме

Аныктоо. Эгерде төмөндөгү эки шарт орун алса:

1) $F_1, F_2, ..., F_n$ клеткаларынын биригүүсү X көп түспөлдүүлүгүн берсе, б.а. алар X көп түспөлдүүлүгүнүн каптоосун түзүшсө;

2) каалагандай ар түрдүү эки клетка кесилишпесе, же алар жалпы чокуга ээ болушса, же жалпы жакка ээ болушса, анда X көп түспөлдүүлүгү *чектүү сандагы клеткалардын көптүгүнө ажырайт* деп айтышат.

Мисалы, тетраэдрдин грандары анын бетинин клеткалык ажыралышы болуп эсептелет.

Ар кандай эки ченемдүү компактуу көп түспөлдүүлүктү жана каалагандай эки ченемдүү, чеги бар, компактуу көп түспөлдүүлүктү чектүү сандагы клеткалардын көптүгүнө ажыратууга болот жана түрдүүчө жолдор менен ажыратса болот.

2. F - кандайдыр бир эки ченемдүү (компактуу же компактуу жана чеги бар) көп түспөлдүүлүк, K -анын клеткалык ажыралышы болсун. Эгерде $x \in F$ чекити K көптүгүндөгү жок дегенде бир клетканын чокусу болсо, анда аны K клеткалык ажыралышынын чокусу деп аташат. Эгерде γ фигурасы $(\gamma \subset F)$ K нын жок дегенде бир клеткасынын жагы болуп эсептелсе, анда аны K

ажыралышынын жагы деп атайбыз. Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизели: α_0 аркылуу - K ажыралышынын чокуларынын санын, α_1 аркылуу - K нын клеткаларынын санын белгилейбиз.

Аныктоо. $\lambda = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ саны F көп түспөлдүүлүгүнүн *Эйлердик мүнөздөмөсү* деп аталат.

Мисалы, эгерде F - тетраэдрдин бети, ал эми K - анын грандарынан түзүлгөн клеткалык ажыралышы болсо, анда $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 4$ жана $\lambda(F) = 2$ боло тургандыгын жеңил эле эсептөөгө болот.

Көп түспөлдүүлүктүн эйлердик мүнөздөмөсү анын кандай клеткалык ажыралышын тандап алуудан көз каранды болбойт.

25-Теорема. Көп түспөлдүүлүктүн Эйлердик мүнөздөмөсү анын топологиялык инварианты болот.

Далилдөө. F жана F' - эки ченемдүү, компактуу (же компактуу жана чеги бар) гомеоморфтуу көп түспөлдүүлүктөрүн карайлы. $f : F \to F'$ - гомеоморфтук чагылтуу болсун. Бул гомеоморфизм F көп түспөлдүүлүгүнүн K клеткалык ажыралышын F' көп түспөлдүүлүгүнүн K' клеткалык ажыралышына өткөрөт. K ажыралышы үчүн $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ сандары кандай болсо, K' ажыралышы үчүн да так ошондой болот. Демек, $\lambda(F) = \lambda(F')$. (ч.т.д.)

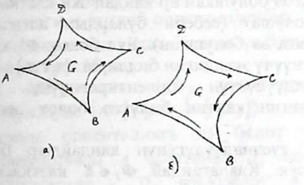
Мисал үчүн E_3 мейкиндигиндеги S сферасынын эйлердик мүнөздөмөсүн табалы. Бул сферага кандайдыр бир тетраэдрди ичтен сызалы. F аркылуу ушул тетраэдрдин сырт бетин белгилеп алалы. F бети компактуу эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк. M_0 - тетраэдрдин ичинде жаткан чекит болсун. $f : F \to S$ чагылтуусун төмөндөгү закон боюнча аныктайлы: эгерде $P \in F$ болсо, анда $f(P) = P_0$ ($P_0 - [M_0 P)$ шооласы менен S сферанын кесилиш чекити) болсун дейли. f чагылтуусу гомеоморфизм болот (**өз алдынча** текшергиле). Демек $\lambda(S) = \lambda(F)$, б.а. $\lambda(S) = 2$.

Φ - эки ченемдүү компактуу (же эки ченемдүү компактуу, чеги бар) көп түспөлдүүлүк болсун. K аркылуу бул көп түспөлдүүлүктүн кандайдыр бир клеткалык ажыралышын белгилейбиз.

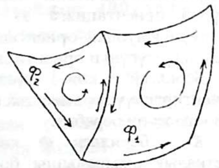
$ABCD$ клеткасын карайлы (25-чийме). Эгерде клетканын жагынын учундагы чекиттердин берилиш тартиби эске алынган болсо, анда бул жакты *ориентирленген жак* деп атайбыз. Биринчи берилген (же көрсөтүлгөн) үчүн - ориентирленген жактын *башталышы*, ал эми экинчи үчүн – *акыркы чекити* деп аташат. Мисалы, AB жана BA жактары карама-каршы ориентирленишкен.

Эгерде $ABCD$ клеткасынын бир жагы $[AB]$ ориентирленген болсо, анда ушул ориентацияга ылайыктуу ориентацияны клетканын бүтүндөй чек арасы боюнча аныктоого болот (25-чиймеде жебелердин жардамында көрсөтүлгөн, б.а. $[AB]$ жагынын акыркы учу болгон B чекитин $[BC]$ жагынын башталышы катары, ал эми C чекитин акыркы чекити катары эсептейбиз, ж.у.с.). Ушундайча ыкма менен клетканын чек арасы ориентирленген болсо, анда аны *ориентирленген клетка* деп аташат. Ар бир клетканы эки түрдүүчө ыкма менен ориентирлесе болот (экинчи ыкма менен ориентирлөөдө $[AB]$ жагынан эмес, $[BA]$ жагынан баштайбыз).

Φ көп түспөлдүүлүгүнүн K клеткалык ажыралышын карайлы. Жалпы жакка ээ болушкан Φ_1 жана Φ_2 клеткаларын алабыз. (26-чиймени карыңыз).



25-чийме



26-чийме

Бул клеткалардын ар бирин жогорудагыдай эки ыкманын бири менен ориентирлейбиз. Бул учурда алардын жалпы жагы эки ориентацияга ээ болуп калат. Эгерде Φ_1 жана Φ_2 клеткаларынын жалпы жагы эки карама-каршы ориентацияга ээ болсо, анда ал клеткаларды *бирдей ориентацияланган* деп айтышат. Ал эми жалпы жагы бирдей эле эки ориентацияга ээ болуп калса, анда Φ_1 жана Φ_2 клеткаларын *карама-каршы ориентацияланган* деп атайбыз (26-чиймедеги Φ_1 жана Φ_2 клеткалары бирдей ориентацияланган).

Аныктоо. Эгерде Φ көп түспөлдүүлүгүнүн кандайдыр бир K клеткалык ажыралышындагы клеткаларды жалпы жакка ээ болушкан каалагандай эки клеткасы бирдей ориентацияга ээ болгондой түрдө ориентирлөөгө мүмкүн болсо, анда Φ *ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүк* деп аталат. Эгерде ушундай клеткалык ажыралышы жашабаса, анда Φ - *ориентирленүүчү эмес* көп түспөлдүүлүк деп аталат.

Ориентирленүүчүлүк түшүнүгү көп түспөлдүүлүктүн клеткалык ажыралышын тандап алуудан көз каранды болбойт.

26-Теорема. Ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүккө гомеоморфтуу болгон көп түспөлдүүлүк да ориентирленүүчү болот (б.а. көп түспөлдүүлүктүн ориентирленүчүүлүк касиети анын топологиялык инварианты болуп эсептелет).

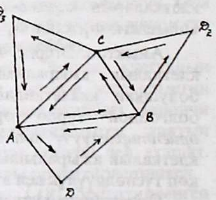
Далилдөө Φ - ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүк, Φ' - ага гомеоморфтуу болгон көп түспөлдүүлүк болсун: $\Phi' = f(\Phi)$, мында f - гомеоморфтуу чагылтуу. Φ көп түспөлдүүлүгүндө ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүктүн аныктоосундагы шартты канааттандыра тургандай K клеткалык ажыралышы жашайт. Ал эми f гомеморфизминде Φ көп түспөлдүүлүгүнүн K клеткалык ажыралышы Φ' көп түспөлдүүлүгүнүн анык бир K' клеткалык ажырлышына өтөт жана K нын ар бир клеткасынын ориентациясы K' тын тиешелүү клеткасына өткөрүлөт. Демек, K' ажыралышынын жалпы жакка ээ болушкан ар кандай эки клеткасы бирдей ориентацияга ээ болушат (себеби булардын алгачкы элестери ушундай ориентацияга ээ болушкан). Бул болсо Φ' көп түспөлдүүлүгүнүн ориентирленүүчү экендигин билдирет. (ч.т.д.)

Берилген көп түспөлдүүлүктүн ориентирленүүчү же ориентирленүүчү эмес экендигин кантип билүүгө болот деген суроого жооп беребиз.

K - берилген Φ көп түспөлдүүлүгүнүн кандайдыр бир клеткалык ажыралышы болсун. Каалагандай $\Phi_1 \in K$ клеткасын алабыз да, аны жогоруда көрсөтүлгөн эки ыкманын бирин колдонуп ориентирлейбиз. Андан соң Φ_1 клеткасы менен жалпы жакка ээ болгон Φ_2 клеткасын алабыз жана аны жалпы жагы Φ_1 клеткасынын ориентациясында ээ болгон ориентациясына карама-каршы ориентацияга ээ боло тургандай ориентирлейбиз. Кийин бул эки клетканын бири менен жалпы жакка ээ болгон үчүнчү клетканы алабыз, ж.у.с. улантылат. Акырында биз төмөндөгү эки учурдун бирине келебиз.

а) Жалпы жакка ээ болушкан ар кандай эки клетка бирдей ориентацияга ээ болушат, демек Φ көп түспөлдүүлүгү ориентирленүүч болот.

б) Карама-каршы ориентацияга ээ болушкан эки клетка табылат. Көп түспөлдүүлүктүн каалагандай клеткалык ажыралышын тандап алсак да, ушундай болот. Демек, Φ



27-чийме

көп түспөлдүүлүгү ориентирленүүчү эмес.

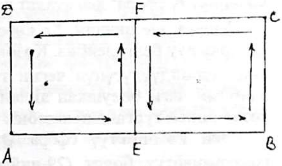
Ошентип, көп түспөлдүүлүктүн ориентирленүүчүлүгүн текшерүүдө анын каалаган клеткалык ажыралышын пайдалансак болот.

Ар кандай тетраэдрдин бети F ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүк экендигин көрсөтөлү.

Ыңгайлуулук үчүн F бетинин жайылмасын (27-чийме) карайбыз. Бул жайылма төрт даана үч бурчтуктардан турат: ABC, ABD_1, BCD_2, ACD_3 (жайылманын D_1, D_2, D_3 чекиттерине тетраэдрдин D чекити туура келет). ABC үч бурчтугунун $[AB]$ жагын A- башталышы, ал эми B - бүтүшү боло тургандай ориентирлейбиз. Бул болсо ABC үч бурчтугунун ориентациясын аныктайт (27-чиймедеги жебечелерди караңыз). ABD_1 үч бурчтугун алабыз да, анын ABC үч бурчтугу менен жалпы жагын B чекитинен A чекитине көздөй ориентирлейбиз. Натыйжада ABD_1 үч бурчтугу ориентирленип калат. Калган үч бурчтуктарды да ушуга окшош эле ориентирлейбиз.

ABD_1 жана ACD_3 клеткаларынын $[AD]$ жалпы жагына (тетраэдрде $[AD]\equiv[AD_1]\equiv[AD_3]$) көңүл бурсак, бул жак эки карам-каршы ориентацияга ээ болот экен (ABD_1 клеткасындагы ориентациясы A чекитинен D_1 чекитин көздөйт, ал эми ACD_3 клеткасында - D_3 чекитинен A чекитин көздөйт). Калган клеткаларда да ушундай эле көрүнүштү байкайбыз. Демек, тетраэдрдин бети ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүк экен.

Сфера болсо тетраэдрдин бетине гомеоморфтуу болгондуктан, ал да ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүккө мисал болот.



28-чийме

Мебиустун барагын ориентирленүүчү эмес (б.а. ориентирленбөөчү) көп түспөлдүүлүккө мисал катары эсептөөгө болот. Мебиустун барагы $ABCD$ тик бурчтугунан $\overrightarrow{BC}$ жана $\overrightarrow{DA}$ багытталган кесиндилери боюнча желимдөөдөн (жабыштыруудан) алына тургандыгын билебиз (28-чийме). Анын $AEFD$ жана $EBCF$ клеткаларынан турган ажыралышын карайлы (мында $E-[AB]$ кесиндисинин, $F-[CD]$

кесиндисинин чекиттери). Бул клеткаларды жогоруда каралган эреже боюнча $[EF]$ кесиндисинен баштап ориентирлейбиз. Анда алардын жалпы жагы $[BC]\equiv[DA]$ бирдей эле ориентацияга ээ болуп калышат экен. Демек, Мебиустун барагы – ориентирленбөөчү көп түспөлдүүлүк.

§12. ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ, КОМПАКТУУ КӨП ТҮСПӨЛДҮҮЛҮКТӨРДҮН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

E_3 евклиддик мейкиндигинде $S(O,r)$ (борбору O чекити, радиусу r болгон) сфераны карайбыз. Π - O чекитинен h аралыгында $(0<h<r)$ жаткан тегиздик болсун. Бул тегиздик E_3 мейкиндигинин өзүндө жатпаган чекиттерин эки жарым мейкиндикке бөлө тургандыгын билебиз. Алардын ар биринин Π тегиздигинин чекиттери менен биригүүсү жөн эле *жарым мейкиндик* (чеги Π тегиздиги болгон) деп аталышы да белгилүү.

F аркылуу O чекити таандык болбогон жарым мейкиндикте жаткан сферанын чекиттеринин көптүгүн белгилейли. Анда $Q_1 = S(0,r)\setminus F$ фигурасы чеги бар көп түспөлдүүлүк болот жана ал туюк тегерекке гомеоморфтуу. Бирок, туюк тегерек үч бурчтукка гомеоморфтуу болгондуктан, бул үч фигура (Q_1 , туюк тегерек, үч бурчтук) бирдей эле эйлердик мүнөздөмөгө ээ болушат жана ал $\chi = 1$ болот. Ушундайча пайда болгон Q_1 көп түспөлдүүлүгү "бир көзөнөктүү сфера" деп аталат жана $\lambda(Q_1)=1$.

Ушуга эле окшош "r көзөнөктүү сфераны" алууга болот, аны Q_r аркылуу белгилейбиз. Көзөнөктөрдүн чеги болгон айланалар Q_r көп түспөлдүүлүгүнүн чегин түзүшөт. Биз көзөнөктөрдү жасоодо алардын чеги болушкан айланалардын арасынан эч кандай экөө кесилишпей тургандай кесебиз.

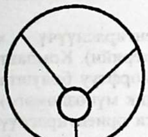
Эки көзөнөктүү сфера Q_2 бир көзөнөктүү туюк тегерекке гомеоморфтуу болот (29-чийме). Ушул көп түспөлдүүлүктөрдүн эйлердик мүнөздөмөсүн табалы. 29-чиймеден $\alpha_0 = 6,\ \alpha_1 = 9,\ \alpha_2 = 3$ экендигин көрөбүз. Демек, $\lambda(Q_2) = 6-9+3=0$.

Мындан, ар бир көзөнөк эйлердик мүнөздөмөнү бирге кичирейте тургандыгын билдик. Математикалык индукция методунун жардамы менен r көзөнөктүү сфера Q_r үчүн

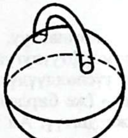
$$\lambda(Q_r) = 2-r \qquad (1)$$

формуласы орун ала тургандыгын далилдөөгө болот.

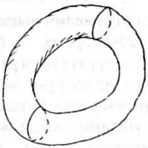
Эки көзөнөктүү сферанын чеги эки γ'_1, γ'_2 айланадан турат. Ал эми тутка (21-чийме, б))дагы чеги бар көп түспөлдүүлүк болот. Анын чеги эки даана бир ченемдүү γ_1, γ_2 көп түспөлдүүлүктөрүнөн турат жана булардын ар бири айланага гомеоморфтуу болот.



29-чийме



30-чийме



31-чийме

Демек, $f_1 : \gamma_1 \to \gamma'_1$ жана $f_2 : \gamma_2 \to \gamma'_2$ гомеоморфтук чагылтуулары жашайт. Бул гомеоморфизмдердин жардамы менен γ_1ди γ'_1 айланасына, γ_2ни γ'_2 айланасына өткөрөбүз. Натыйжада тутканы Q_2 сферасына желимдөө (жабыштыруу) ишке ашат. Мында желимдөөнү тутканын ичинде жайланышкан чекиттер Q_2 фигурасын камтыган S сферасы менен чектелген $\overline{B}(0,r)$ шарына карата сырткы чекиттер болгондой ишке ашырабыз. Пайда болгон фигура *бир туткалуу сфера* деп аталат (30-чийме). Бул көп түспөлдүүлүк торго (31-чийме) гомеоморфтуу болот.

Эми Q_{2p+r} көп түспөлдүүлүгүн карайлы. Бул фигура - $2p+r$ көзөнөктүү сфера. Биз бул көзөнөктөрдүн P жубуна (б.а. $2p$ даанасына) туткаларды жабыштырып чыгабыз, ал эми r даана көзөнөктөр кала беришсин. Пайда болгон фигураны $Q_{p,r}$ символу менен белгилейбиз жана аны r даана көзөнөктүү pдаана туткалуу (көпчүлүк учурда жөн эле "r көзөнөктүү, p туткалуу сфера") сфера деп аташат (p,r - терс эмес бүтүн сандар). Төмөндөгүдөй теорема орун алат.

27-Теорема. Каалагандай ориентирленүүчү, компактуу, эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк кандайдыр бир $Q_{p,0}$ көп түспөлдүүлүгүнө гомеоморфтуу болот; ал эми каалагандай ориентирленүүчү, компактуу, эки ченемдүү, чеги бар көп түспөлдүүлүк кандайдыр бир $Q_{p,r}$ көп түспөлдүүлүгүнө гомеоморфтуу болот. Бул теореманын далилдөөсүн [5] китептен табасыңар.

P саны бул көп түспөлдүүлүктүн *түрү*, ал эми r саны -

тоомдорунун саны саны деп аталат.

Төмөндөгү формула (1) формуланын жалпыланышы болуп эсептелет:

$$\chi(Q_{p,r}) = 2 - 2p - r \qquad (2)$$

Бул формуладан тордун эйлердик мүнөздөмөсү $\chi(Q_{1,0}) = 0$ экендиги келип чыгат.

28-Теорема. (Эки компактуу, ориентирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдүн гомеоморфтуулугунун критерийи). Компактуу, ориентирленүүчү эки көп түспөлдүүлүк гомеоморфтуу болуштары үчүн алардын бирдей түргө (же бирдей эйлердик мүнөздөмөгө) ээ болуштары зарыл жана жетиштүү. Ал эми эки ориентирленүүчү, компактуу, чеги бар көп түспөлдүүлүктөр гомеоморфтуу болуштары үчүн алар бирдей эле түргө ээ болушуп жана тоомдорунун саны да барабар болушу зарыл жана жетиштүү.

Бул теореманын далилдөөсүнө токтолбойбуз.

P туткалуу сфераны эки ченемдүү, ориентирленүүчү, компактуу, p түрүндөгү көп түспөлдүүлүктүн *нормалдык формасы* деп аташат, ал эми p туткалуу жана r көзөнөктүү сфераны болсо эки ченемдүү, компактуу, ориентирленүүчү, чеги r даана тоомдордон турган p түрүндөгү көп түспөлдүүлүктүн *нормалдык формасы* деп аташат.

Ориентирленбөөчү, компактуу көп түспөлдүүлүктөр жөнүндө кээ бир негизги фактыларды гана белгилей кетебиз.

Мебиустун барагынын чеги айланага гомеоморфтуу экендигин көргөнбүз (23-чийме). Ошондуктан $p+1$ көзөнөктүү Q_{p+1} сфераны алабыз жана бул көзөнөктөргө Мебиустун барактарын жабыштырабыз. Биз компактуу, ориентирленбөөчү ψ_p көп түспөлдүүлүгүнө ээ болобуз. $\chi(\psi_p) = \chi(Q_{p+1})$ экендигин, б.а. ар кандай компактуу, ориентирленбөөчү, эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк ψ_p көп түспөлдүүлүгүнө гомеоморфтуу экендигин далилдөөгө болот ([5] китептен табасыз). (1) формуладан төмөндөгүнү алабыз:

$$\chi(\psi_p) = 1 - p \qquad (3)$$

Эгерде Q_1 сферасын (б.а. Q_1 - бир көзөнөктүү сфера, $p = 0$) алып жана көзөнөгүнө Мебиустун барагын жабыштырсак, анда ψ_0 фигурасына ээ болобуз. Бул көп түспөлдүүлүктүн эйлердик мүнөздөмөсү $\chi(\psi_0) = 1$ болот.

Төмөндөгү эки теореманы далилдөөсүз баяндайбыз.

28-Теорема. Каалагандай ориентирленбөөчү, компактуу эки ченемдүү көп түспөлдүүлүк ψ_p көп түспөлдүүлүгүнө гомеоморфтуу болот. ***P*** саны ушул көп түспөлдүүлүктүн *түрү* деп аталат.

29-Теорема. Компактуу, ориентирленбөөчү, эки ченемдүү эки көп түспөлдүүлүктөр гомеоморфтуу болуштары үчүн алардын бирдей түрдө болушу (б.а. эйлердик мүнөздөмөлөрүнүн барабар болушу) зарыл жана жетиштүү.

АДАБИЯТТАР

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия – Москва: Наука. Гл.ред. физ. –мат. Лит., 1990. -672 с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. – Москва: Просвещение, 1987. -352 с.
3. Болтянский В.Г., Ефремов В.А. Наглядная топология. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1982. –160 с.
4. Келли Дж.Л. Общая топология. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. -432 с.
5. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. – Москва: Мир., 1983. -301 с.
6. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - Москва: Издательство Московского Университета, 1980. - 439 с. 268 ил.

Автор жөнүндө маалымат

Матиева Гүлбадан

Физика-математика илимдеринин доктору.

Специальность – 0.01.04 – геометрия жана топология.

ОшМУнун алгебра жана геометрия кафедрасынын башчысы, «Сынчыл ойлоону өстүрө тургандай окуу жана жазуу» программасынын эл аралык деңгээлдеги тренери.

Изилдөө проблемалары:

- Дифференцирленүүчү көп түспөлдүүлүктөрдү чагылтуулар, торчолор жана бөлүштүрүүлөр;
- Дифференциалдык теңдемелердин геометриялык теориясы;
- Математиканы жогорку окуу жайларда окутууда инновациялык методдорду колдонуунун өзгөчөлүктөрү.

75тен ашуун илимий, илимий-усулдук макалалары, төрт окуу колдонмосу, 1 монографиясы жарыкка чыккан.

√ 211